УДК 332.14; 519.86; 519.83

А. Ф. Шориков, Л. А. Коршунов

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХУРОВНЕВОГО МИНИМАКСНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ РЕГИОНА[1]

В данной статье рассматривается дискретная динамическая система, состоящая из набора управляемых объектов (региона и образующих его муниципалитетов), динамика каждого из которых описывается соответствующим векторным линейным дискретным рекуррентным соотношением при наличии управляемых параметров и возмущений (рисков). В системе выделены два уровня принятия управленческих решений — доминирующий (региональный или первый уровень) и подчиненный (муниципальный, или второй уровень), имеющие различные критерии функционирования и объединенные между собой априори определенными информационными и управленческими связями. Рассматривается задача оптимизации управления экономической безопасностью региона при наличии рисков. Для исследуемой задачи в данной работе предлагается экономико-математическая модель двухуровневого иерархического минимаксного программного управления экономической безопасностью региона при наличии рисков и общая схема ее решения.

Ключевые слова: экономико-математическая модель, экономическая безопасность региона, дискретная динамическая система, двухуровневая иерархическая система управления, минимаксное программное управление

---

1. Введение

Математическое моделирование сложных экономических, технических и др. динамических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности, приводит к ситуации, когда явно присутствуют несколько уровней принятия управленческих решений при наличии конкретных условий информированности и иерархической подчиненности для управляющих субъектов. Математические модели таких процессов являются многоуровневыми иерархическими динамическими системами с неполной информацией, и их исследование представляет самостоятельный интерес в рамках математической теории процессов управления и экономико-математического моделирования.

В статье рассматривается дискретная динамическая система, состоящая из набора управляемых объектов (региона и образующих его муниципалитетов), динамика каждого из которых описывается соответствующим векторным линейным дискретным рекуррентным соотношением при наличии управляемых параметров и возмущений (векторов рисков). В данной системе выделены два уровня принятия управленческих решений — доминирующий (региональный) уровень I, управляемый доминирующим игроком P (субъектом управления регионом), и подчиненный (муниципальный) уровень II, управляемый игроком E (субъектом управления муниципалитетами). В сфере интересов доминирующего игрока P находятся финальные (терминальные) значения фазовых состояний всех рассматриваемых объектов: объекта I — основного (региона в целом) и объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$ — n вспомогательных объектов (муниципалитетов, входящих в состав региона), и определенных для них нескольких критериев качества, а в сфере интересов подчиненного игрока E находятся значения только финальных фазовых состояний вспомогательных объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$ и соответствующего критерия качества ($n \in \mathbf{N}$; здесь и далее $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел). Оба уровня управления объединены между собой априори определенными информационными и управляющими связями, и для каждого игрока описываются конкретные условия информационного обеспечения в рассматриваемом процессе управления. Предполагается также, что выбор управляющего воздействия на уровне управления II подчиненным игроком E зависит от выбора управляющего воздействия на уровне управления I доминирующим игроком P. Качество управления рассматриваемыми динамическими объектами на каждом уровне управления оценивается соответствующими им выпуклыми функционалами, которые определены на их терминальных (финальных) фазовых состояниях и удовлетворяют соответствующим условиям Липшица. Предполагается, что фазовые состояния всех объектов, управляющие воздействия и априори неопределенные параметры рассматриваемой динамической системы в каждый момент времени стеснены заданными конечными множествами в соответствующих конечномерных векторных пространствах или совместными системами линейных алгебраических уравнений.

Для исследуемой динамической системы в данной работе предлагается экономико-математическая формализация в форме решения многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного (оптимизации гарантированного результата) программного управления экономической безопасностью региона и предложена общая схема ее решения.

Важной особенностью предлагаемой методики управления экономической безопасностью региона является то, что ее реализация позволяет сочетать интересы как региона в целом, так и образующих его муниципалитетов.

Полученные в работе результаты основываются на исследованиях [2]–[8] и могут быть использованы при компьютерном моделировании и создании многоуровневых систем управления для сложных динамических экономических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности. Математические модели таких процессов представлены, например, в работах [2]–[8].

2. Формирование экономико-математической модели динамики двухуровневой системы управления благосостоянием региона

На заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ ($T > 0$) рассматривается многошаговая динамическая система, которая состоит из (n + 1)-го управляемого объекта ($n \in \mathbf{N}$). Динамика объекта I (основного объекта системы — региона), управляемого доминирующим игроком P, описывается векторным линейным дискретным рекуррентным уравнением вида

$$y(t+1) = A(t)y(t) + B(t)u(t) + \\ +C(t)v(t) + D(t)w(t), \;\; y(0) = y_0, \qquad (1)$$

динамика объекта II_i (i-го вспомогательного объекта системы — i-го муниципалитета), управляемого подчиненным игроком E_i ($i \in \overline{1, n}$), описывается следующим уравнением

$$z^{(i)}(t+1) = A^{(i)}(t)z^{(i)}(t) + B^{(i)}(t)u(t) +$$
$$+C^{(i)}(t)v^{(i)}(t) + D^{(i)}(t)w^{(i)}(t),\ z^{(i)}(0) = z_0^{(i)}, \quad (2)$$

где $t \in \overline{0, T-1}$; $y(t) = (y_1(t),\ y_2(t),\ \dots,\ y_r(t))' \in \mathbf{R}^r$ — вектор фазовых переменных или фазовый вектор объекта I — набор основных параметров, описывающих состояние экономической безопасности региона в момент времени t; для $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство векторов-столбцов, даже если из экономии места они записаны в строку; $z^{(i)}(t) = (z_1^{(i)}(t),\ z_2^{(i)}(t),\ \dots,\ z_{s_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{s_i}$ — вектор фазовых переменных или фазовый вектор объекта II_i — набор основных параметров, описывающих состояние экономической безопасности i-го муниципалитета ($i \in \overline{1, n}$) в момент времени t; $u(t) = (u_1(t),\ u_2(t),\ \dots,\ u_p(t))' \in \mathbf{R}^p$ — вектор управляющего воздействия (управления) доминирующего игрока P в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$), удовлетворяющий заданному ограничению:

$$u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t) \subset \mathbf{R}^p,$$
$$\boldsymbol{U}_1(t)=\{u(t):\ u(t) \in \{u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), \cdots, u^{(N_t)}(t)\} \subset \mathbf{R}^p\}, (3)$$

где $U_1(t)$, для каждого $t \in \overline{0, T-1}$, есть конечное множество векторов, то есть конечный набор, состоящий из N_t ($N_t \in \mathbf{N}$) векторов в $\mathbf{R}^p$ ($p \in \mathbf{N}$); $v^{(i)}(t) = (v_1^{(i)}(t), v_2^{(i)}(t), \dots, v_{q_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{q_i}$ — вектор управляющего воздействия (управления) подчиненного игрока E_i ($i \in \overline{1, n}$) в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$), который зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P ($j \in \overline{1, N_t}$) и должен удовлетворять следующему заданному ограничению:

$$v^{(i)}(t) \in V_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) \subset \mathbf{R}^{q_i},$$
$$\boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) = \{v^{(i)}(t):\ v^{(i)}(t) \in$$
$$\in \{v^{(i,1)}(t), v^{(i,2)}(t), \cdots, v^{(Q_t^{(i)}(j))}(t)\} \subset \mathbf{R}^{q_i}\}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ для каждого момента времени $t \in \overline{0, T-1}$ и управления $u(j) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P есть конечное множество векторов, то есть конечный набор, состоящий из $Q_t^{(i)}(j)$ ($Q_t^{(i)}(j) \in \mathbf{N}$, $j \in \overline{1, N_t}$) векторов в $\mathbf{R}^{q_i}$; $v(t) = (v^{(1)}(t),\ v^{(2)}(t),\ \dots,\ v^{(n)}(t))' \in \mathbf{R}^{(n \times q)}$ — вектор управления обобщенного подчиненного игрока E, объединяющего всех подчиненных игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$ ($q = \sum_{i=1}^{n} q_i \in \mathbf{N}$).

Предполагается, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$, каждая допустимая реализация фазового вектора $x(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \dots,\ x_n(t))' \in \mathbf{R}^r$ объекта I удовлетворяет следующему заданному фазовому ограничению:

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \boldsymbol{Y}_1(t) \subset \mathbf{R}^r,$$
$$\boldsymbol{Y}_1(t) = \{y(t):\ y(t) \in \mathbf{R}^r,\ My(t) \le b\} \ne \varnothing, \quad (5)$$

то есть множество $\boldsymbol{Y}_1(t)$ ограничивает допустимые значения реализации фазового вектора объекта I в момент времени t. В ограничении (5): M — действительная матрица порядка ($r \times r$); $b \in \mathbf{R}^r$ — фиксированный вектор; здесь и далее, в матричных неравенствах символы $\le$, $=$, $\ge$ означают соответствующее покоординатное сравнение векторов. Для всех $t \in \overline{0, T-1}$, каждая допустимая реализация фазового вектора $z^{(i)}(t) = (z_1^{(i)}(t), z_2^{(i)}(t), \dots, z_{s_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{s_i}$ объекта II_i ($i \in \overline{1, n}$) удовлетворяет следующему заданному фазовому ограничению:

$$z^{(i)}(t) = (z_1^{(i)}(t), z_2^{(i)}(t), \dots, z_{s_i}^{(i)}(t)) \in \boldsymbol{Z}_1^{(i)}(t) \subset \mathbf{R}^{s_i},$$
$$\boldsymbol{Z}_1^{(i)}(t) = \{z^{(i)}(t):\ z^{(i)}(t) \in \mathbf{R}^{s_i},\ M^{(i)}z^{(i)}(t) \le b^{(i)}\} \ne \varnothing, \quad (6)$$

то есть множество $\boldsymbol{Z}_1^{(i)}(t)$ ограничивает допустимые значения реализации фазового вектора объекта II_i в момент времени t. В ограничении (6): $M^{(i)}$ — действительная матрица порядка ($s_i \times s_i$); $b^{(i)} \in \mathbf{R}^{s_i}$ — фиксированный вектор. В уравнении (1), описывающем динамику объекта I, $w(t) = (w_1(t),\ w_2(t),\ \dots,\ w_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор рисков (или помехи) для этого объекта, который в каждый период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$) зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P ($j \in \overline{1, N_t}$) и удовлетворяет заданному ограничению:

$$w(t) \in \boldsymbol{W}_1(u^{(j)}(t)) \subset \mathbf{R}^m,$$
$$\boldsymbol{W}_1(u^{(j)}(t)) = \{w(t):\ w(t) \in \mathbf{R}^m,$$
$$Rx(t) + Lu^{(j)}(t) \le c\} \ne \varnothing, \quad (7)$$

то есть множество $\boldsymbol{W}_1(u^{(j)}(t))$ ограничивает возможные значения реализации вектора рисков $w(t)$ в момент времени t, влияющего на динамику объекта I. В ограничении (7): $m \in \boldsymbol{N}$; R — действительная матрица порядка ($r \times r$); L — действительная матрица порядка ($r \times p$); $c \in \mathbf{R}^r$ — фиксированный вектор. В уравнении (2), описывающем динамику объекта II_i ($i \in \overline{1, n}$), $w^{(i)}(t) = (w_1^{(i)}(t), w_2^{(i)}(t), \dots, w_{m_i}^{(i)}(t))' \in \mathbf{R}^{m_i}$ — вектор рисков (или помехи) для этого объекта, который в каждый период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$) также зависит от допустимой реализации управления $u^{(j)}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P ($j \in \overline{1, N_t}$) и удовлетворяет заданному ограничению:

$$w^{(i)}(t) \in \boldsymbol{W}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) \subset \mathbf{R}^{m_i},$$
$$\boldsymbol{W}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)) = \{w^{(i)}(t):\ w^{(i)}(t) \in \mathbf{R}^{m_i},$$
$$R^{(i)}z^{(i)}(t) + L^{(i)}u^{(j)}(t) \le c^{(i)}\} \ne \varnothing, \quad (8)$$

то есть множество $\boldsymbol{W}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ ограничивает возможные значения реализации вектора рисков $w^{(i)}(t)$ в момент времени t, влияющего на динамику объекта II_i. В ограничении (8): $m_i \in \mathbf{N}$; $R^{(i)}$ — действительная матрица порядка $(s_i \times s_i)$; $L^{(i)}$ — действительная матрица порядка $(s_i \times p)$; $c^{(i)} \in \mathbf{R}^{s_i}$ — фиксированный вектор.

Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ в векторном рекуррентном уравнении (1), описывающем динамику объекта I, есть действительные матрицы порядков $(r \times r)$, $(r \times p)$, $(r \times q)$ и $(r \times m)$ соответственно и такие, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$ матрица $A(t)$ является невырожденной, то есть для нее существует соответствующая ей обратная матрица $A^{-1}(t)$, а ранг матрицы $B(t)$ равен p (размерности вектора $u(t)$). В векторном рекуррентном уравнении (2), описывающем динамику объекта II_i, $i \in \overline{1, n}$, матрицы $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$, $C^{(i)}(t)$ и $D^{(i)}(t)$ есть действительные матрицы порядков $(s_i \times s_i)$, $(s_i \times p)$, $(s_i \times q_i)$ и $(s_i \times m_i)$ соответственно, и такие, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$ матрица $A^{(i)}(t)$ является невырожденной, то есть для нее существует соответствующая ей обратная матрица $[A^{(i)}(t)]^{-1}$, а ранг матрицы $C^{(i)}(t)$ равен q_i (размерности вектора $v^{(i)}(t)$).

3. Информационные условия для субъектов управления

В сфере интересов игрока P находятся возможные состояния фазового вектора объекта I и возможные состояния фазовых векторов объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$. При этом, для каждого целочисленного промежутка времени (далее — промежутка) $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < \vartheta)$ игроку P известен набор $w(\tau) = \{\tau, y(\tau), z^{(1)}(\tau), z^{(2)}(\tau), \ldots, z^{(n)}(\tau)\} \in$ $\in \overline{0,T} \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{s_1} \times \mathbf{R}^{s_2} \times \cdots \times \mathbf{R}^{s_n} = \overline{0,T} \times R^r \times \prod_{i=1}^{n} R^{s_i}$ $(g(0) = \{0, y_0, z_0^{(1)}(\tau), z_0^{(2)}(\tau), \ldots, z_0^{(n)}(\tau) = g_0)$, который будем называть его τ-позицией. Игроку P известен также принцип формирования управления $v^{(i)}(\cdot) = \{v^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}: v^{(i)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)))$ каждым из игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$, на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$, который зависит от выбора на этом промежутке управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}: u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t))$ игроком P и описывается соотношением (4), причем выбранное каждым игроком E_i управление сообщается игроку P.

Таким образом, на каждом промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ игрок P в момент времени τ имеет полную информацию о реализациях фазовых векторов всех объектов I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, а также знает принцип формирования управлений игроками E_i, $i \in \overline{1, n}$ на этом промежутке, а выбранные ими управления сообщаются ему.

Предполагается также, что по ходу реализации процесса управления и фиксированного натурального числа $s >> T > 0$, в каждый момент времени $\tau \in \overline{0, T-1}$ игроку P на промежутке $\overline{-s, \tau}$, предшествующем рассматриваемому промежутку $\overline{\tau, \vartheta}$, известна следующая информация :

1) известна история реализации фазового вектора объекта I $y_\tau(\cdot) = (y_1(\cdot)_\tau, y_2(\cdot)_\tau, \ldots, y_r(\cdot)_\tau) = \{(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_r(t))\}_{t \in \overline{-s, \tau}} = \{y(\tau)\}_{t \in \overline{-s, \tau}}$;

2) для каждого $i \in \overline{1, n}$ известна история реализации фазового вектора объекта II_i $z_\tau^{(i)}(\cdot) = (z_1^{(i)}(\cdot)_\tau, z_2^{(i)}(\cdot)_\tau, \ldots, z_{s_i}^{(i)}(\cdot)_\tau) = \{(z_1^{(i)}(t)_\tau, z_2^{(i)}(t)_\tau, \ldots, z_{s_i}^{(i)}(t)_\tau)\}_{t \in \overline{-s, \tau}} = \{z^{(i)}(\tau)\}_{t \in \overline{-s, \tau}}$;

3) известна история реализации управляющего воздействия игрока P $u_\tau(\cdot) = (u_1(\cdot)_\tau, u_2(\cdot)_\tau, \ldots, u_p(\cdot)_\tau) = \{(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t))\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}} = \{u(t)\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}}$;

4) для каждого $i \in \overline{1, n}$ известна история реализации управляющего воздействия игрока E_i $v_\tau^{(i)}(\cdot) = (v_1^{(i)}(\cdot)_\tau, v_2^{(i)}(\cdot)_\tau, \ldots, v_{q_i}^{(i)}(\cdot)_\tau) = \{(v_1^{(i)}(t)_\tau, v_2^{(i)}(t)_\tau, \ldots, v_{q_i}^{(i)}(t)_\tau)\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}} = \{v^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}}$;

5) известна история реализации вектора рисков, влияющего на динамику объекта I $w_\tau(\cdot) = (w_1(\cdot)_\tau, w_2(\cdot)_\tau, \ldots, w_m(\cdot)_\tau) = \{(w_1(t), w_2(t), \ldots, w_m(t))\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}} = \{w(t)\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}}$;

6) для каждого $i \in \overline{1, n}$ известна история реализации вектора рисков, влияющего на динамику объекта II_i $w_\tau^{(i)}(\cdot) = (w_1^{(i)}(\cdot)_\tau, w_2^{(i)}(\cdot)_\tau, \ldots, w_{m_i}^{(i)}(\cdot)_\tau) = \{(w_1^{(i)}(t)_\tau, w_2^{(i)}(t)_\tau, \ldots, w_{m_i}^{(i)}(t)_\tau)\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}} = \{w^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{-s, \tau-1}}$.

Отметим, что на основе этих данных игроку P можно решить задачу апостериорной идентификации [2, 3, 8] всех основных элементов рассматриваемой дискретной динамической системы, то есть определить элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$, $C^{(i)}(t)$ и $D^{(i)}(t)$ в векторных рекуррентных уравнениях (1) и (2), описывающих ее динамику.

Результат реализации рассматриваемого процесса управления с позиции игрока P оценивается значением выпуклого функционала α, определенного на допустимых финальных фазовых состояниях объектов I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, который удовлетворяет соответствующему условию Липшица. Отметим, что каждое конкретное значение этого функционала оценивает состояние экономической безопасности региона, соответствующее конкретному состоянию фазовых векторов всех объектов рассматриваемой динамической системы. Тогда на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ целью игрока P в рассматриваемом процессе управления является минимизация значения выбранного функционала α путем выбора его допустимого программного управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}$: $u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t))$, а также обработки имеющейся в его распоряжении информации, в расчете на возможные наихудшие реализации неконтролируемых им параметров рассматриваемой дискретной динамической системы (1)–(8) на этом промежутке времени.

Учитывая эти обстоятельства, мы будем говорить, что такие возможности поведения игрока P совместно с объектами I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, определяют доминирующий или уровень управления I рассматриваемого процесса управления в дискретной динамической системе (1)–(8).

Предполагается, что в сфере интересов каждого игрока E_i ($i \in \overline{1, n}$) находятся возможные состояния только объекта II_i и для любого рассматриваемого промежутка времени $\overline{\tau, \vartheta}$ ему сообщается реализация управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1} : u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t))$ игрока P на этом промежутке времени, которую он должен учитывать при формировании своего управления $v^{(i)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t))$ для всех $t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}$. При этом в момент времени τ ему также известен набор $g^{(i)}(\tau) = \{\tau, z^{(i)}(\tau)\} \in \overline{0, T} \times \mathbf{R}^{s_i}$ ($g^{(i)}(0) = \{0, z^{(i)}(0)\} = g_0^{(i)}$), который будем называть τ-позицией игрока E_i.

Таким образом, это означает, что выбор возможной реализации управления $v^{(i)}(\cdot) = \{v^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}: v^{(i)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u^{(j)}(t)))$ игроком E_i на рассматриваемом промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ в каждый момент времени $t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}$ в соответствии с ограничением (4) стеснен допустимой реализацией управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1} : u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t))$ игрока P, которое сообщается игроку E_i ($i \in \overline{1, n}$) а значения $u(t)$ в каждый момент времени $t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}$ определяют соответствующие им ограничения (4). При этом введенное ограничение (4) устанавливает, что поведение каждого игрока E_i ($i \in \overline{1, n}$) при достижении поставленных перед ним целей, которые будут сформулированы в следующем разделе, явно зависит от поведения игрока P. Тогда, учитывая этот факт, совокупность n игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$, называемых также игроком E, и управляемых ими объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, образуют подчиненный или уровень управления II рассматриваемого процесса управления (подчиненный доминирующему или уровню управления I).

Результат реализации рассматриваемого процесса управления с позиции игрока E оценивается значением выпуклого функционала β, определенного на допустимых финальных фазовых состояниях объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, который удовлетворяет соответствующему условию Липшица. Отметим, что каждое конкретное значение этого функционала оценивает состояние экономической безопасности муниципалитетов, образующих регион, соответствующее конкретному состоянию фазовых векторов всех объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, рассматриваемой динамической системы. Тогда на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ целью игрока E в рассматриваемом процессе управления является минимизация значения функционала β путем выбора каждым из игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$, на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ ($\tau < T$), соответствующих управлений $v^{(i)}(\cdot) = \{v^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}: v^{(i)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u(t)))$, которые зависят, в соответствии с соотношением (4), от выбора игроком Р на этом промежутке управления $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ $(\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1} : u(t) \in \boldsymbol{U}_1(t))$, а также обработки имеющейся в его распоряжении информации, в расчете на возможные наихудшие реализации неконтролируемых им параметров рассматриваемой дискретной динамической системы (1)–(8) на этом промежутке времени.

Предполагается также, что в рассматриваемом процессе управления для любого момента времени $t \in \overline{0, T}$ игроку P известны соотношения (1)–(8), а каждому игроку E_i, ($i \in \overline{1, n}$) известны соотношения (2), (4), (6), (8) при фиксированном значении индекса i (игроку E эти соотношения известны для всех $i \in \overline{1, n}$).

4. Постановка задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного управления экономической безопасностью региона

Введем ряд определений, которые необходимы для строгой математической формализации задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного управления экономической безопасностью региона для рассматриваемой дискретной динамической системы (1)–(8).

Для $k \in \mathbf{N}$ и любого целочисленного промежутка $\overline{i, j}$ ($i \le j$) символом $\boldsymbol{S}_k(\overline{i, j})$ будем обозначать метрическое пространство функций целочисленного аргумента $\phi: \overline{i, j} \to \mathbf{R}^k$, в котором метрика ρ_k задается соотношением

$$\rho_k(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot)) = \max_{t \in \overline{i, j}} \left\| \phi_1(t) - \phi_2(t) \right\|_k$$

$$((\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in \boldsymbol{S}_k(\overline{i, j}) \;\; \boldsymbol{S}_k(\overline{i, j}),$$

а символом $\mathrm{comp}(\boldsymbol{S}_k(\overline{i, j}))$ — множество всех непустых и компактных, в смысле этой метрики, подмножеств пространства $\boldsymbol{S}_k(\overline{i, j})$.

Здесь и далее для любых множеств X и Y множество $X \times Y$ есть произведение X и Y, то есть множество всех пар (x, y) таких, что $x \in X$, $y \in Y$ (аналогичное обозначение используется и для большего числа множеств).

Используя ограничение (3), определим множество $\boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \subset \mathbf{R}^{(p \times (\vartheta - \tau))}$ программных управлений $u(\cdot) = \{u(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ игрока P на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < \vartheta)$ соотношением:

$$\boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta}) = \{u(\cdot):\ u(\cdot) \in \ \mathbf{R}^{(p \times (\vartheta - \tau))},$$
$$\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\ u(t) \in \ \boldsymbol{U}_1(t)\}, \qquad (9)$$

которое есть множество всех допустимых реализаций программных управлений $u(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации управления игрока P) на целочисленном промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ и в силу сделанного предположения является конечным множеством векторов пространства $\mathbf{R}^{(p \times (\vartheta - \tau))}$.

Для фиксированных программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta})$ и индекса $i \in \overline{1, n}$, используя ограничение (4), определим множество $\boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta};\ u(\cdot)) \subset \mathbf{R}^{(q_i \times (\vartheta - \tau))}$ программных управлений $v^{(i)}(\cdot) = \{v^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ игрока E_i на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ соответствующих $u(\cdot)$, следующим соотношением:

$$\boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta};\ u(\cdot)) = \{v^{(i)}(\cdot):$$
$$v^{(i)}(\cdot) \in \mathbf{R}^{(q_i \times (\vartheta - \tau))}(\overline{\tau, \vartheta - 1}),$$
$$\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\ v^{(i)}(t) \in \boldsymbol{V}_1^{(i)}(u(t))\} \qquad (10)$$

которое есть множество всех допустимых реализаций программных управлений $v^{(i)}(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации управления игрока E_i) на целочисленном промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ и в силу сделанного предположения является конечным множеством векторов пространства $\mathbf{R}^{(q_i \times (\vartheta - \tau))}$.

Далее, для фиксированного программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta})$, используя ограничение (7), определим множество $\boldsymbol{W}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) \in \mathrm{comp}(\boldsymbol{S}_m(\overline{\tau, \vartheta - 1}))$ программных рисков $w(\cdot) = \{w(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ для объекта I на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ соответствующих $u(\cdot)$, следующим соотношением:

$$W(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) = \{w(\cdot):\ \ w \in S_m(\overline{\tau, \vartheta - 1}),$$
$$\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\ w(t) \in \boldsymbol{W}_1(u(t))\}, \qquad (11)$$

которое есть множество всех допустимых реализаций вектора рисков $w(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации вектора рисков в рассматриваемом процессе управления) на целочисленном промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$.

Для фиксированных программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta})$ и индекса $i \in \overline{1, n}$, используя ограничение (7), определим множество $\boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) \in \mathrm{comp}(\boldsymbol{S}_{m_i}(\overline{\tau, \vartheta - 1}))$ программных рисков $w^{(i)}(\cdot) = \{w^{(i)}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ для объекта II_i на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ соответствующих $u(\cdot)$, следующим соотношением:

$$\boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) = \{w^{(i)}(\cdot): w^{(i)} \in \boldsymbol{S}_{m_i}(\overline{\tau, \vartheta - 1}),$$
$$\forall t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\ w^{(i)}(t) \in \boldsymbol{W}_1^{(i)}(u(t))\}, \qquad (12)$$

которое есть множество всех допустимых реализаций вектора рисков $w^{(i)}(\cdot)$ (всех возможных сценариев реализации вектора рисков в рассматриваемом процессе управления) на целочисленном промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$.

Далее, для фиксированного программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta})$ введем следующие множества:

$$\boldsymbol{V}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)),$$
$$\hat{\boldsymbol{W}}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) \qquad (13)$$

соответственно всех возможных наборов $v(\cdot) = (v^{(1)}(\cdot), \ldots, v^{(2)}(\cdot), v^{(n)}(\cdot)) \in \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) = \boldsymbol{V}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot))$ допустимых программных управлений совокупности игроков E_i $i \in \overline{1, n}$, или допустимых программных управлений $v(\cdot)$ игрока E на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$, и всех наборов $\hat{w}(\cdot) = (w^{(1)}(\cdot), \ldots, w^{(2)}(\cdot), w^{(n)}(\cdot)) \in \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot)) = \hat{\boldsymbol{W}}(\overline{\tau, \vartheta}; u(\cdot))$ допустимых реализаций векторов рисков для совокупности объектов II_i $i \in \overline{1, n}$ (или обобщенного объекта II), на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$.

Пусть для любого промежутка времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$ множество $\boldsymbol{G}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbf{R}^r \times \prod_{i=1}^{n} \mathbf{R}^{s_i}$ есть множество всех τ-позиций $g(\tau) = \{\tau, y(\tau), z^{(1)}(\tau), z^{(2)}(\tau), \quad \ldots, z^{(n)}(\tau)\} \in \overline{0, T} \times \mathbf{R}^r \times \prod_{i=1}^{n} \mathbf{R}^{s_i}$ $(g(0) = \{0,\ y(0),\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0),\ \ldots,$ $z^{(n)}(0)\} = g_0)$ игрока P $(\boldsymbol{G}(0) = \{g(0)\} = \{g_0\} = \boldsymbol{G}_0)$. Тогда для оценки качества рассматриваемого динамического процесса на уровне управления I введем функционал

$$\alpha : \boldsymbol{G}(\tau) \times \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T}) \times (\boldsymbol{V}(\overline{\tau, T}) \times \boldsymbol{W}(\overline{\tau, T}) \times \hat{\boldsymbol{W}}(\overline{\tau, T}) =$$
$$= \boldsymbol{\Gamma}(\overline{\tau, T};\ \alpha) \to \mathbf{E} =]-\infty, +\infty[, \qquad (14)$$

значения которого для допустимых на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ реализаций $g(\tau) \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$, $v(\cdot) = [v^{(1)}(\cdot),\ v^{(2)}(\cdot),$ $\ldots,\ v^{(n)}(\cdot)] \in \boldsymbol{V}(\overline{\tau, T})$, $w(\cdot) \in \boldsymbol{W}(\overline{\tau, T})$ и $\hat{w}(\cdot) = [w^{(1)}(\cdot),$ $w^{(2)}(\cdot), \ldots, w^{(n)}(\cdot)] \in \hat{\boldsymbol{W}}(\overline{\tau, T})$ определяются следующим конкретным соотношением:

$$\alpha(g(\tau),u(\cdot),v(\cdot),w(\cdot),\hat{w}(\cdot)) =$$

$$\mu\cdot\gamma(y(T))+\sum_{i=1}^{n}\mu_i\cdot\beta^{(i)}(z^{(i)}(T)). \qquad (15)$$

Здесь символом $y(T) = y_T(\overline{\tau, T};\ y(\tau),\ u(\cdot),\ v(\cdot),\ w(\cdot))$ обозначено состояние в финальный момент времени T траектории объекта I на промежутке времени $\overline{\tau, T}$, а через $z^{(i)}(T)=z_T^{(i)}(\overline{\tau,T};z^{(i)}(\tau),u(\cdot),v^{(i)}(\cdot),w^{(i)}(\cdot))$ — состояние в этот же момент времени траектории объекта II_i $(i \in \overline{1, n})$ на промежутке времени $\overline{\tau, T}$, которые порождены соответственно наборами $\{y(\tau),u(\cdot),v(\cdot),w(\cdot)\}$ и $\{z^{(i)}(\tau),u(\cdot),v^{(i)}(\cdot),w^{(i)}(\cdot)\}$ и формируются согласно рекуррентным уравнениям (1) и (2) $(y(0)=y_0, z^{(i)}(0)=z_0^{(i)})$; $\mu \in \mathbf{R}^1$ и $\mu^{(i)} \in \mathbf{R}^1$, $i \in \overline{1, n}$ — заданные числовые параметры, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu\geq 0;\ \forall i\in\overline{1,n}{:}\mu_i\geq 0;\ \sum_{i=1}^{n}\mu_i=1-\mu \qquad (16)$$

функционалы $\gamma\colon \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ и $\beta^{(i)}\colon \mathbf{R}^{s_i} \to \mathbf{R}^1$, $i \in \overline{1, n}$, являются выпуклыми и удовлетворяют соответственно следующим условиям Липшица:

$$\forall(y^{(1)},y^{(2)})\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r:$$

$$\left\|\gamma(y^{(1)})-\gamma(y^{(2)})\right\|_r\leq L\left\|y^{(1)}-y^{(2)}\right\|_r;$$

$$\forall(z^{(i,1)},z^{(i,2)})\in\mathbf{R}^{s_i}\times\mathbf{R}^{s_i}:$$

$$\left\|\beta^{(i)}(z^{(i,1)})-\beta^{(i)}(z^{(i,2)})\right\|_{s_i}\leq L\left\|z^{(i,1)}-z^{(i,2)}\right\|_{s_i},$$

где $L \in \mathbf{R}^1$ и $L^{(i)} \in \mathbf{R}^1$, $i \in \overline{1, n}$ — постоянные Липшица.

Далее, обозначим через $\boldsymbol{G}^{(i)}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbf{R}^{s_i}$ множество всех возможных τ-позиций $g^{(i)}(\tau) = \{\tau, z^{(i)}(\tau)\} \in \{\tau\} \times \mathbf{R}^{s_i}$ игрока E_i $(i \in \overline{1, n};\ g^{(i)}(0) = \{0, z^{(i)}(0)\} = \{0, z_0^{(i)}\} = g_0^{(i)};\ \ \boldsymbol{G}^{(i)}(0) = \{g^{(i)}(0)\} = \{g_0^{(i)}\} = \boldsymbol{G}_0^{(i)})$, а через $\hat{\boldsymbol{G}}(\tau)=\{\tau\}\times\prod_{i=1}^{n}\mathbf{R}^{s_i}$ обозначим множество всех возможных τ-позиций $\hat{g}(\tau)=\{\tau,z^{(1)}(\tau),z^{(2)}(\tau),\ldots,z^{(n)}(\tau)\}\in\overline{0,T}\times\mathbf{R}^r\times\prod_{i=1}^{n}\mathbf{R}^{s_i}$ $(\hat{g}(0)=\{\tau,z^{(1)}(0),z^{(2)}(0),\ldots,z^{(n)}(0)\}=\hat{g}_0)$ для совокупности игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$, или игрока E (), то есть для II уровня управления $(\hat{\boldsymbol{G}}(0)=\{\hat{g}(0)\}=\{\hat{g}_0\}=\hat{\boldsymbol{G}}_0)$.

Тогда качество управления для рассматриваемого динамического процесса каждым из игроков E_i $(i \in \overline{1, n})$ на уровне управления II рассматриваемого процесса управления оценивается соответствующим ему функционалом $\hat{\beta}^{(i)}$ вида

$$\hat{\beta}^{(i)} : \boldsymbol{G}^{(i)}(\tau) \times \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T}) \times (\boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T}) \times \boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, T}) =$$

$$= \mathbf{\Gamma}(\overline{\tau, T};\ \hat{\beta}^{(i)}) \to \mathbf{E}, \qquad (17)$$

значения которого для допустимых на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ реализаций $g^{(i)}(\tau) \in \boldsymbol{G}^{(i)}(\tau)$, $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$, $v^{(i)}(\cdot) \in \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T})$ и $w^{(i)}(\cdot) \in \boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, T})$, определяются следующим конкретным соотношением:

$$\hat{\beta}^{(i)}(g^{(i)}(\tau),\ u(\cdot),\ v^{(i)}(\cdot),\ w^{(i)}(\cdot)) = \beta^{(i)}(z^{(i)}(T)), \quad (18)$$

то есть этот функционал оценивает качество управления игроком E_i на фиксированном промежутке времени $\overline{\tau, T}$ финальными фазовыми состояниями объекта II_i $(i \in \overline{1, n})$.

Следует отметить, что если рассмотреть функционал

$$\hat{\gamma} : \boldsymbol{G}(\tau) \times \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T}) \times (\boldsymbol{V}(\overline{\tau, T}) \times \boldsymbol{W}(\overline{\tau, T}) =$$

$$= \mathbf{\Gamma}(\overline{\tau, T};\ \hat{\gamma}) \to \mathbf{E}, \qquad (19)$$

значения которого для допустимых на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ реализаций $g(\tau) \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$, $v(\cdot) = \{v^{(1)}(\cdot), v^{(2)}(\cdot), \ldots, v^{(n)}(\cdot)\} \in \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T})$, и $w(\cdot) \in \boldsymbol{W}(\overline{\tau, T})$ определяются соотношением:

$$\hat{\gamma}(g(\tau),\ u(\cdot),\ v(\cdot),\ w(\cdot)) = \gamma(y(T)), \qquad (20)$$

оценивая качество управления игроком P на фиксированном промежутке времени $\overline{\tau, T}$ финальными фазовыми состояниями объекта I на уровне управления I динамической системой (1)–(8), и ввести векторный функционал $\delta = (\hat{\gamma}, \hat{\beta}^{(1)}, \hat{\beta}^{(2)}, \ldots, \hat{\beta}^{(n)})$ такой, что

$$\delta\ :\ \mathbf{\Gamma}(\overline{\tau,T};\hat{\gamma})\times\prod_{i=1}^{n}\mathbf{\Gamma}(\overline{\tau,T};\hat{\beta}^{(i)})\to\mathbf{E}^{n+1}, \qquad (21)$$

значения $(n + 1)$-го параметра которого определяются для допустимых реализаций их аргументов согласно соотношениям (17)–(20), то можно утверждать, что функционал α, определенный соотношениями (14)–(16), является его сверткой, полученной в соответствии с применением метода скаляризации (см., например, [4]) векторных функционалов.

Таким образом, функционал α является выпуклым и позволяет оценивать функционирование на промежутке $\overline{\tau, T}$ двухуровневой динамической системы (1)–(8) в целом, рассматриваемой как совокупность объектов I, II_i, $i \in \overline{1, n}$, игроков P и E_i, $i \in \overline{1, n}$ (или E), объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$ (или E), определяющих уровни управления I и II соответственно, являясь сверткой векторного терминального функционала δ, для скаляризации которого используются числовые параметры $\mu \in \mathbf{R}^1$ и $\mu^{(i)} \in \mathbf{R}^1$, $i \in \overline{1, n}$, оценивающие значимость каждого из функционалов γ и $\beta^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$, соответственно. Отметим, что параметры μ и $\mu^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$, могут определяться, например, экспертным путем на основании экспериментальных данных о рассматриваемом динамическом процессе (1)–(8).

Тогда, на основании изложенного выше, цель каждого из игроков E_i $(i \in \overline{1, n})$ (которые в совокупности и вместе с объектами II_i $i \in \overline{1, n}$, определяют уровень управления II в рассматриваемом динамическом процессе (1)–(8)), при минимаксном программном управлении на фиксированном промежутке времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$ соответственно объектом II_i, содержательно может быть сформулирована следующим образом. Будем считать, что игрок E_i $(i \in \overline{1, n})$, используя имеющиеся у него информационные и управляющие возможности, заинтересован в таком исходе процесса программного управления в динамической системе (1)–(8) на промежутке времени $\overline{\tau, T}$, при котором функционал $\hat{\beta}^{(i)}$, определяемый соотношениями (17), (18), для любых допустимых реализаций его τ-позиций $g^{(i)}(\tau) = \{\tau, z^{(i)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}^{(i)}(\tau)$ $(g^{(i)}(0) = g_0^{(i)} \in \boldsymbol{G}_0^{(i)})$ и программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P на этом промежутке времени принимает наименьшее возможное значение, за счет возможного выбора своего допустимого программного управления $v^{(i)}(\cdot) \in \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T}; u(\cdot))$. При этом не исключается из анализа такая ситуация, когда параметр $w^{(i)}(\cdot) \in \boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, T}; u(\cdot))$ может реализоваться на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ наихудшим образом для игрока E_i, то есть определяя наибольшее возможное значение функционала $\hat{\beta}^{(i)}$ при фиксированных реализациях элементов $g^{(i)}(\tau)$, $u(\cdot)$ и $v^{(i)}(\cdot)$.

Для осуществления этой цели игрока E_i $(i \in \overline{1, n})$ ниже формулируется следующая задача минимаксного программного терминального управления объектом II_i на уровне управления II двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8).

Задача 1. Для фиксированных индекса $i \in \overline{1, n}$, промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$, допустимой на уровне управления II двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8) реализации τ-позиции $g^{(i)}(\tau) = \{\tau, z^{(i)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}^{(i)}(\tau)$ $(g^{(i)}(0) = g_0^{(i)} \in \boldsymbol{G}_0^{(i)})$ игрока E_i и допустимой реализации программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}$ $\overline{\tau, T}$ игрока P на уровне управления I требуется найти множество $\boldsymbol{V}^{(i,e)}(\overline{\tau, T}; g^{(i)}(\tau), u(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T}; u(\cdot))$ минимаксных программных управлений $v^{(i,e)}(\cdot) \in \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T}; u(\cdot))$ игрока E_i, соответствующих управлению $u(\cdot)$ игрока P, которое определяется соотношением

$$V^{(i,e)}(\overline{\tau,T}; g^{(i)}(\tau), u(\cdot)) =$$

$$\{v^{(i,e)}(\cdot): \ v^{(i,e)}(\cdot) \in V^{(i)}(\overline{\tau,T}; u(\cdot)),$$

$$c^{(e)}_{\hat{\beta}^{(i)}}(\overline{\tau,T}; g^{(i)}(\tau), u(\cdot)) =$$

$$= \max_{w^{(i)}(\cdot) \in W^{(i)}(\overline{\tau,T}; u(\cdot))} \hat{\beta}^{(i)}(g^{(i)}(\tau), u(\cdot), v^{(i,e)}(\cdot), w^{(i)}(\cdot)) =$$

$$= \min_{v^{(i)}(\cdot) \in V^{(i)}(\overline{\tau,T}; u(\cdot))} \ \max_{w^{(i)}(\cdot) \in W^{(i)}(\overline{\tau,T}; u(\cdot))} \{$$

$$\hat{\beta}^{(i)}(g^{(i)}(\tau), u(\cdot), v^{(i)}(\cdot), w^{(i)}(\cdot))\}, \qquad (22)$$

где функционал $\hat{\beta}^{(i)}$ определен соотношениями (17) и (18).

Множество $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T}; \hat{g}(\tau), u(\cdot)) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{V}^{(i,e)}(\overline{\tau,T}; g^{(i)}(\tau), u(\cdot)) = \{v^{(e)}(\cdot)\} = \{v^{(1,\ e)}(\cdot),\ v^{(2,\ e)}(\cdot), \ldots,\ v^{(n,\ e)}(\cdot)\} \in \boldsymbol{V}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ $(\hat{g}(\tau) = \{\tau,\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau), \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{G}}(t)$, $\hat{g}(0) = \{0,\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0), \ldots, z^{(n)}(0)\} = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$, которое формируется из решения n задач 1 при $i \in \overline{1, n}$, будем называть множеством минимаксных программных управлений игрока E для уровня управления II динамической системы (1)–(8), а соответствующее ему значение вектора $c^{(e)}_{\hat{\beta}}(\overline{\tau,T}; \hat{g}(\tau), u(\cdot)) = (c^{(e)}_{\hat{\beta}^{(1)}}(\overline{\tau,T}; g^{(1)}(\tau), u(\cdot)),\ c^{(e)}_{\hat{\beta}^{(2)}}(\overline{\tau,T}; g^{(2)}(\tau), u(\cdot)),\ \cdots,\ c^{(e)}_{\hat{\beta}^{(n)}}(\overline{\tau,T}; g^{(n)}(\tau), u(\cdot))) \in \mathbf{E}^n$ — значением результата минимаксного программного управления для игрока E на уровне управления II этой системы. При этом оба данных элемента соответствуют фиксированным и допустимым промежутку времени $\overline{\tau, T}$, τ-позиции $\hat{g}(\tau) \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$ $(\hat{g}(0) = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$ игрока E на уровне управления II и управлению $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P на уровне управления I. Заметим, что число $c^{(e)}_{\hat{\beta}}(\overline{\tau,T}; \hat{g}(\tau), u(\cdot))$ является конкретным значением векторного функционала $\hat{\beta} = (\hat{\beta}^{(1)}, \hat{\beta}^{(2)}, \ldots, \hat{\beta}^{(m)})$, определяемого на основании (17) следующим отображением:

$$\hat{\beta}:\ \Gamma(\overline{\tau,T}; \hat{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} \Gamma(\overline{\tau,T}; \hat{\beta}^{(i)}) \to \mathbf{E}^n,$$

где для каждого индекса $i \in \overline{1, n}$ значение функционала $\hat{\beta}^{(i)}$ определяется по формуле (18). Векторный функционал $\hat{\beta}$ можно было бы рассматривать в роли критерия качества поведения игрока E (совокупности игроков E_i, $i \in \overline{1, n}$) на уровне управления II, в ситуации, когда все игроки E_i, $i \in \overline{1, n}$, имеют общую цель, то есть входят в одну коалицию.

Таким образом, решение задачи 1 определяет на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ принцип формирования минимаксных программных управлений $v^{(i,e)}(\cdot) \in \boldsymbol{V}^{(i,e)}(\overline{\tau, T}; g^{(i)}(\tau), u(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T}; u(\cdot))$ каждым из игроков E_i $(i \in \overline{1, n})$ на уровне управления II, отвечающих реализации его τ-позиции $g^{(i)}(\tau) = \{\tau,\ z^{(i)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}^{(i)}(\tau)$ $(g^{(i)}(0) = g_0^{(i)} \in \boldsymbol{G}_0^{(i)})$ и подчиненных выбору управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}\,\overline{\tau, T}$ игроком P на I уровне управления.

Отметим, что, учитывая конечность множеств допустимых программных управлений $\boldsymbol{U}\,\overline{\tau, T}$ и $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ игроков Р и E_i $(i \in \overline{1, n})$ соответственно, многогранные свойства множества допустимых программных рисков $\boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$, соответствующего фиксированному программному управлению $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P, и соотношения (9)–(22), можно показать (см., например, [7,8]), что решение задачи 1 существует и сводится к решению конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования, а также конечного числа задач дискретной оптимизации.

Учитывая введенные выше определения и сделанные предположения относительно параметров и информационных связей для двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8), цель игрока P, определяющего уровень управления I в этой системе при реализации рассматриваемого процесса двухуровневого минимаксного программного управления на заданном промежутке времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$, то есть управления объектами I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, содержательно может быть сформулирована следующим образом. Будем считать, что игрок P, используя имеющиеся у него информационные и управляющие возможности, заинтересован в таком исходе процесса программного управления в динамической системе (1)–(8) на промежутке времени $\overline{\tau, T}$, при котором функционал α, определяемый соотношением (14), (15) для любой допустимой реализации его τ-позиции $(g(\tau) = \{\tau,\ y(\tau),\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau),\ \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $(g(0) = \{0,\ y(0),\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0),\ \ldots,\ z^{(n)}(0)\} = g_0 \in \boldsymbol{G}_0)$ принимает наименьшее возможное значение за счет возможного выбора допустимых своего программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ и программного минимаксного управления $v^{(e)}(\cdot) = \{v^{(1,\ e)}(\cdot),\ v^{(2,\ e)}(\cdot),\ \ldots,\ v^{(n,\ e)}(\cdot)\} \in \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau),\ u(\cdot))$ игрока E (формируемого игроками E_i, $i \in \overline{1, n}$, путем решения n задач 1 при $i \in \overline{1, n}$), подчиненного игроку P (где τ-позиция $(\hat{g}(\tau) = \{\tau,\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau),\ \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $(\hat{g}(0) = \{0,\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0),\ \ldots,\ z^{(n)}(0)\} = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$, определяющая состояние всех объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, на уровне управления II в момент времени τ, формируется из τ-позиции $g(\tau)$. Отметим, что при анализе системы (1)–(8) не исключается такая ситуация, когда параметры-риски $w(\cdot) \in \boldsymbol{W}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ и $w^{(i)}(\cdot) \in \boldsymbol{W}^{(i)}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ могут реализоваться наихудшим образом для игрока P, то есть определяя наибольшее возможное значение функционала α при фиксированных реализациях элементов $g(\tau)$, $u(\cdot)$, и $v^{(e)}(\cdot)$.

Ниже, для реализации достижения этой цели игрока P, связанной с уровнем управления I, формулируется следующая задача минимаксного программного терминального управления объектами I и II_i, $i \in \overline{1, n}$, на уровне управления I двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8).

Задача 2. Для фиксированных промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$, допустимой на уровне управления I двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8) реализации τ-позиции $(g(\tau) = \{\tau,\ y(\tau),\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau),\ \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}(\tau)$ $(g(0) = \{0,\ y(0),\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0),\ \ldots,\ z^{(n)}(0)\} = g_0 \in \boldsymbol{G}_0)$ игрока P требуется найти множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau))$ минимаксных программных управлений $u^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P, которое определяется следующим соотношением

$$\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau,T};g(\tau)) =$$

$$= \{u^{(e)}(\cdot):\ u^{(e)}(\cdot) \in U(\overline{\tau,T}),\ c_\alpha^{(e)}(\overline{\tau,T};g(\tau)) =$$

$$= \min_{v^{(e)}(\cdot)\in V^{(e)}(\overline{\tau,T};\hat{g}(\tau),u^{(e)}(\cdot))} \max_{\substack{w(\cdot)\in W(\overline{\tau,T};u^{(e)}(\cdot)) \\ \hat{w}(\cdot)\in \hat{W}(\overline{\tau,T};u^{(e)}(\cdot))}} \{$$

$$\alpha(g(\tau),u^{(e)}(\cdot),v^{(e)}(\cdot),w(\cdot),\hat{w}(\cdot))\} =$$

$$= \min_{u(\cdot)\in U(\overline{\tau,T})} \min_{v^{(e)}(\cdot)\in V^{(e)}(\overline{\tau,T};\hat{g}(\tau),u(\cdot))} \max_{\substack{w(\cdot)\in W(\overline{\tau,T};u(\cdot)) \\ \hat{w}(\cdot)\in \hat{W}(\overline{\tau,T};u(\cdot))}} \{$$

$$\alpha(g(\tau),u(\cdot),v^{(e)}(\cdot),w(\cdot),\hat{w}(\cdot))\}. \qquad (23)$$

Здесь функционал α определен соотношениями (14) и (15); τ-позиция $\hat{g}(\tau) = \{\tau,\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau),\ \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $(\hat{g}(0) = \{0,\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0),\ \ldots,\ z^{(n)}(0)\} = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$ игрока E формируется из τ-позиции $g(\tau)$ игрока P и определяет реализацию в момент времени τ состояния всех объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$ на уровне управления II динамической системы (1)–(8), а множество $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau),\ u(\cdot)) = \{v^{(e)}(\cdot)\} = \{v^{(1,\ e)}(\cdot),\ v^{(2,\ e)}(\cdot),\ \ldots,\ v^{(n,\ e)}(\cdot)\} \subseteq \boldsymbol{V}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ минимаксных программных управлений игрока E для уровня управления II рассматриваемой динамической системы (1)–(8) для любых реализаций τ-позиции $\hat{g}(\tau) \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $(\hat{g}(0) = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$ игрока E и программного управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P находится из решения задач 1 для всех значений параметра $i \in \overline{1, n}$.

Множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau)) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$, которое формируется из решения задачи 2, будем называть множеством минимаксных программных управлений игрока P для уровня управления I динамической системы (1)–(8), а соответствующее ему число $c_\alpha^{(e)}(\overline{\tau,T};g(\tau))$ — значением результата минимаксного программного управления для игрока P на уровне управления I этой системы. Причем множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau))$ и число $c_\alpha^{(e)}(\overline{\tau,T};g(\tau))$ соответствуют фиксированным и допустимым промежутку времени $\overline{\tau, T}$ и τ-позиции $g(\tau) \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $(g(0) = g_0 \in \boldsymbol{G}_0)$ игрока P на уровне управления I.

Следует отметить, что решение задачи 2 определяет на промежутке времени $\overline{\tau, T}$ принцип формирования минимаксных программных управлений $u^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau), u(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T})$ игроком P на уровне управления I, отвечающих реализации его τ-позиции $g(\tau) \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $(g(0) = g_0 \in \boldsymbol{G}_0)$.

Отметим, что, учитывая конечность множества допустимых программных управлений $\boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P и множества $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau), u(\cdot))$ минимаксных программных управлений игрока E для уровня управления II рассматриваемой динамической системы (1)–(8), многогранные свойства множеств допустимых программных рисков $\boldsymbol{W}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ и $\hat{\boldsymbol{W}}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$, соответствующего фиксированному программному управлению $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ соответственно игроков P и E, и соотношения (9)–(23), можно показать (см., например, [7, 8]), что решение задачи 2 существует и сводится к решению конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования, а также конечного числа задач дискретной оптимизации.

На основании сформулированных выше задач 1 и 2 рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Для фиксированных промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$, допустимой на уровне управления I двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8) реализации τ-позиции $(g(\tau) = \{\tau,\ y(\tau),\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau), \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $(g(0) = \{0,\ y(0),\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0), \ldots,\ z^{(n)}(0)\} = g_0 \in \boldsymbol{G}_0)$ игрока P, допустимой на уровне управления II этой системы реализации τ-позиции $(\hat{g}(\tau) = \{\tau,\ z^{(1)}(\tau),\ z^{(2)}(\tau), \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $(\hat{g}(0) = \{0,\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0), \ldots,\ z^{(n)}(0)\} = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$ игрока E, сформированной из τ-позиции $g(\tau)$, и допустимой реализации минимаксного программного управления $u^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau))$ игрока P на уровне управления I, которое можно сформировать из решения задачи 2, требуется найти множество $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau),\ u^{(e)}(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ u^{(e)}(\cdot))$ минимаксных программных управлений $\{\hat{v}^{(e)}(\cdot)\} = \{\hat{v}^{(1,e)}(\cdot), \hat{v}^{(2,e)}(\cdot), \ldots, \hat{v}^{(n,e)}(\cdot)\} \in \boldsymbol{V}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot))\}$ игрока E для уровня управления II и вектор $c^{(e)}_{\hat{\beta}}(\overline{\tau,T};\hat{g}(\tau),u^{(e)}(\cdot)) = (c^{(e)}_{\hat{\beta}(1)}(\overline{\tau,T};g^{(1)}(\tau),u^{(e)}(\cdot)), c^{(e)}_{\hat{\beta}(2)}(\overline{\tau,T};g^{(2)}(\tau),u^{(e)}(\cdot)),\ldots, c^{(e)}_{\hat{\beta}(n)}(\overline{\tau,T};g^{(n)}(\tau),u^{(e)}(\cdot)))' \in \mathbf{E}^n$ — значение результата минимаксного программного управления для игрока E на уровне управления II данной системы, соответствующие управлению $u^{(e)}(\cdot)$ игрока P, которые в соответствии с (22) и (23) определяются соотношениями:

$$\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot)) = \{\hat{v}^{(e)}(\cdot)\} : \hat{v}^{(e)}(\cdot) \in \in \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot)),$$

$$c^{(e)}_{\alpha}(\overline{\tau,T};g(\tau)) = \max_{\substack{w(\cdot)\in W(\overline{\tau,T};u(\cdot))\\ \hat{w}(\cdot)\in \hat{W}(\overline{\tau,T};u(\cdot))}} \{ \alpha(g(\tau),u^{(e)}(\cdot),\hat{v}^{(e)}(\cdot),w(\cdot),\hat{w}(\cdot))\} = \min_{v^{(e)}(\cdot)\in V^{(e)}(\overline{\tau,T};\hat{g}(\tau),u^{(e)}(\cdot))} \ \max_{\substack{w(\cdot)\in W(\overline{\tau,T};u(\cdot))\\ \hat{w}(\cdot)\in \hat{W}(\overline{\tau,T};u(\cdot))}} \{ \alpha(g(\tau),u^{(e)}(\cdot),v^{(e)}(\cdot),w(\cdot),\hat{w}(\cdot))\}\}; \quad (24)$$

$$i \in \overline{1, n}:\ c^{(e)}_{\hat{\beta}^{(i)}}(\overline{\tau,T};g^{(i)}(\tau),u^{(e)}(\cdot)) = \max_{w^{(i)}(\cdot)\in W^{(i)}(\overline{\tau,T};u^{(e)}(\cdot))} \{ \hat{\beta}^{(i)}(g^{(i)}(\tau),u^{(e)}(\cdot),v^{(i,e)}(\cdot),w^{(i)}(\cdot))\} = \min_{v^{(i)}(\cdot)\in V^{(i)}(\overline{\tau,T};u^{(e)}(\cdot))} \ \max_{w^{(i)}(\cdot)\in W^{(i)}(\overline{\tau,T};u^{(e)}(\cdot))} \{ \hat{\beta}^{(i)}(g^{(i)}(\tau),u^{(e)}(\cdot),v^{(i)}(\cdot),w^{(i)}(\cdot))\}. \quad (25)$$

Здесь функционал α определен соотношениями (14) и (15); для каждого индекса $i \in \overline{1, n}$ функционал $\hat{\beta}^{(i)}$ определен соотношениями (17) и (18); τ-позиция $\hat{g}(\tau) = \{\tau, z^{(1)}(\tau), z^{(2)}(\tau), \ldots,\ z^{(n)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $\hat{g}(0) = \{0,\ z^{(1)}(0),\ z^{(2)}(0),\ \ldots, z^{(n)}(0)\} = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0$ игрока E формируется из τ-позиции $g(\tau)$ игрока P и определяет в момент времени τ реализацию состояния всех объектов II_i, $i \in \overline{1, n}$, на уровне управления II динамической системы (1)–(8), а множество $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau),\ u^{(e)}(\cdot)) = \{\hat{v}^{(e)}(\cdot)\} = \{\hat{v}^{(1,e)}(\cdot),\ \hat{v}^{(2,e)}(\cdot), \ldots, \hat{v}^{(n,e)}(\cdot)\} \in \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot))$ минимаксных программных управлений игрока E для уровня управления II рассматриваемой системы (1)–(8) для любых фиксированных и допустимых промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$, реализаций τ–позиции $(\hat{g}(\tau) \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $(\hat{g}(0) = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$ игрока E на уровне управления II и минимаксного программного управления $u^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau))$ игрока P на уровне управления I находится из решения n задач 1, соответствующих значениям индекса $i \in \overline{1, n}$.

Учитывая, что решение этой задачи основывается на решениях задач 1 и 2, можно сделать вывод, что решение задачи 3 существует и также сводится к решению конечного числа задач линейного, выпуклого математического программирования и конечного числа задач дискретной оптимизации.

5. Общая схема решения задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного управления экономической безопасностью региона

Таким образом, для любых допустимых и фиксированных промежутка времени $\overline{\tau, T} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < T)$, допустимой на уровне управления I двухуровневой иерархической динамической системы (1)–(8) реализации τ-позиции $g(\tau) = \{\tau, y(\tau), z^{(1)}(\tau), z^{(2)}(\tau), \ldots, z^{(n)}(\tau)\} \in \boldsymbol{G}(\tau)$, $(g(0) = \{0, y(0), z^{(1)}(0), z^{(2)}(0), \ldots, z^{(n)}(0)\} = g_0 \in \boldsymbol{G}_0)$ игрока P, допустимой на уровне управления II рассматриваемой динамической системы (1)–(8), реализации τ-позиции $\hat{g}(\tau) = \{\tau, z^{(1)}(\tau), z^{(2)}(\tau), \ldots, z^{(n)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{G}}(\tau)$, $(\hat{g}(0) = \{0, z^{(1)}(0), z^{(2)}(0), \ldots, z^{(n)}(0)\} = \hat{g}_0 \in \hat{\boldsymbol{G}}_0)$ игрока E на уровне управления II данной системы, сформированной из τ-позиции $g(\tau)$, можно рассмотреть решения сформулированных задач 1–3, которые в совокупности определяют задачу двухуровневого иерархического минимаксного программного управления.

Тогда общую схему реализации процесса двухуровневого минимаксного программного управления экономической безопасностью региона можно представить в виде реализации следующей последовательности действий:

1) для любых фиксированных управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P на уровне управления I и индекса $i \in \overline{1, n}$ из решения соответствующей задачи 1 формируются множество $\boldsymbol{V}^{(i,e)}(\overline{\tau, T};\ g^{(i)}(\tau),\ u(\cdot))$ минимаксных программных управлений игрока E_i и число $c^{(e)}_{\hat{\beta}(i)}(\overline{\tau,T}; g^{(i)}(\tau), u(\cdot))$ — значение результата минимаксного программного управления для этого игрока на уровне управления II, соответствующее управлению $u(\cdot)$, которые удовлетворяют соотношению (22); на основании этих элементов, из решения n задач 1 для всех значений индекса $i \in \overline{1, n}$, формируется множество $\boldsymbol{V}^{(i,e)}(\overline{\tau, T};\ g^{(i)}(\tau),\ u(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T}; u(\cdot))$ минимаксных программных управлений $v^{(i,e)}(\cdot) \in \boldsymbol{V}^{(i)}(\overline{\tau, T};\ u(\cdot))$ игрока E_i на уровне управления II и вектор $c^{(e)}_{\hat{\beta}}(\overline{\tau,T}; \hat{g}(\tau), u(\cdot))$ $= (c^{(e)}_{\hat{\beta}(1)}(\overline{\tau,T}; g^{(1)}(\tau), u(\cdot)), c^{(e)}_{\hat{\beta}(2)}(\overline{\tau,T}; g^{(2)}(\tau), u(\cdot)), \ldots, c^{(e)}_{\hat{\beta}(n)}(\overline{\tau,T}; g^{(n)}(\tau), u(\cdot))) \in \mathbf{E}^n$ — значение результата минимаксного программного управления для игрока E на уровне управления II этой системы, соответствующих управлению $u(\cdot)$ игрока P на уровне управления II;

2) из решения задачи 2 формируются множество $\boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau))$ минимаксных программных управлений $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ игрока P на уровне управления I и число $c^{(e)}_{\alpha}(\overline{\tau,T}; g(\tau))$ — значение результата минимаксного программного управления для игрока P на уровне управления I этой системы, удовлетворяющие соотношению (23);

3) для любого допустимого минимаксного программного управления $u^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ g(\tau))$ игрока P на уровне управления I, которое можно сформировать из решения задачи 2, из решения задачи 3 формируются множество $\boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau),\ u^{(e)}(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T};\ \hat{g}(\tau),\ u^{(e)}(\cdot)) \subseteq \boldsymbol{V}(\overline{\tau, \vartheta};\ u(\cdot))$ минимаксных программных управлений $\{\hat{v}^{(e)}(\cdot)\} = \{\hat{v}^{(1,e)}(\cdot), \hat{v}^{(2,e)}(\cdot), \ldots, \hat{v}^{(n,e)}(\cdot)\} \in \boldsymbol{V}^{(e)}(\overline{\tau, T}; \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot))$ игрока E для уровня управления II и вектор $c^{(e)}_{\hat{\beta}}(\overline{\tau,T}; \hat{g}(\tau), u^{(e)}(\cdot)) =$ $(c^{(e)}_{\hat{\beta}(1)}(\overline{\tau,T}; g^{(1)}(\tau), u^{(e)}(\cdot)),\ c^{(e)}_{\hat{\beta}(2)}(\overline{\tau,T}; g^{(2)}(\tau), u^{(e)}(\cdot)), \ldots,$ $c^{(e)}_{\hat{\beta}(n)}(\overline{\tau,T}; g^{(n)}(\tau), u^{(e)}(\cdot)))' \in \mathbf{E}^n$ — значение результата минимаксного программного управления для игрока E на уровне управления II данной системы, соответствующие управлению $u^{(e)}(\cdot)$ игрока P, соответствующие управлению $u^{(e)}(\cdot)$ и удовлетворяющие соотношениям (24), (25), такие, что для каждого фиксированного индекса $i \in \overline{1, n}$ образующие их элементы $\hat{v}^{(i,e)}(\cdot)$ и $c^{(e)}_{\hat{\beta}(i)}(\overline{\tau,T}; g^{(i)}(\tau), u^{(e)}(\cdot))$ совместно с управлением $u^{(e)}(\cdot)$ игрока P удовлетворяют и соотношению (22).

6. Заключение

Для исследуемой в данной работе задачи управления экономической безопасностью региона предлагается математическая формализация в форме решения многошаговой задачи двухуровневого иерархического минимаксного программного управления в дискретной динамической системе (1)–(8), и предложена общая схема ее решения. Отметим, что важной особенностью предлагаемой методики управления экономической безопасностью региона является то, что ее реализация позволяет сочетать интересы как региона в целом, так и образующих его муниципалитетов.

Полученные в работе результаты основываются на исследованиях [2-8] и могут быть использованы при компьютерном моделировании и создании многоуровневых систем управления для других сложных экономических процессов, функционирующих в условиях риска и неопределенности. Математические модели таких процессов представлены, например, в работах [2-8].

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 14-18-00574 «Информационно-аналитическая система «Антикризис»: диагностика регионов, оценка угроз и сценарное прогнозирование с целью сохранения и усиления экономической безопасности и повышения благосостояния России»).

Список источников

1. *Базара М.*, *Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. — М.: Мир, 1982. — 583 с.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
3. *Красовский Н. Н.*, *Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
4. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984. — 392 с.
5. *Пропой А. И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
6. *Тер-Крикоров А. М.* Оптимальное управление и математическая экономика. — М.: Наука, 1977. — 216 с.
7. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы: сб. научн. тр. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2005. — С. 119-138.
8. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. — 242 с.

Информация об авторах

Шориков Андрей Федорович (Екатеринбург, Россия) — доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия (620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Коршунов Лев Александрович (Барнаул, Россия) — доктор экономических наук, профессор,президент, Алтайский государственный технический университет им. И. И.Ползунова (656038, Алтайскийкрай, г. Барнаул, пр. Ленина, 46, e-mail: prezident.altstu@mail.altstu.ru).

A. F. Shorikov, L. A. Korshunov

Economic-mathematical model of two-level minimax program control of economic security of a region

This article discusses a discrete-time dynamical system consisting of a set of a controllable objects (region and forming it municipalities). The dynamics each of these is described by the corresponding vector linear discrete-time recurrent relations, and its control system consist from two levels: basic (control level I) that is dominating and subordinate level (control level II). Both levels have different criterions of functioning and united a priori by determined informational and control connections defined in advance. Considered addresses the problem of optimization of management of economic security of the region in the presence of risks. For the investigated problem is proposed in this work an economic-mathematical model of two-level hierarchical minimax program control of economic security of the region in the presence of risk and the general scheme of the solution.

Keywords: economics and mathematical modeling, economic security of region, discrete-time dynamical system, two-level hierarchical control system, minimax program control problem.

The study is supported by the grant of the Russian Scientific Fund (project No. 14-18-00574 "Information and analytical "Anti-crisis" system: diagnostics of regions, threat assessments, and scenario forecasting for the purpose of maintaining and strengthening of economic security and improve welfare of Russia").

References

1. Bazara, M. & Shetti, K. (1982). *Nelineynoye programmirovanie. Teoriya i algoritmy [Nonlinear programming. Theory and algorithms].* Moscow, Mir, 583.
2. Krasovskiy, N. N. (1968). *Teoriya i upravlenie dvizheniem [Traffic control theory].* Moscow, Nauka, 476.
3. 3. Krasovskiy, N. N. & Subbotin, A. I. (1974). *Pozitsionnyye differentsialnyye igry [Position differential games].* Moscow, Nauka, 456.
4. Lotov, A. V. (1984). *Vvedenie v ekonomiko-matematicheskoye modelirovanie [Introduction in economic-mathematical modeling].* Moscow, Nauka, 392.
5. Propoy, A. I. (1973). *Elementy teorii optimalnykh diskretnykh protsessov [Theory elements of the optimum discrete processes].* Moscow, Nauka, 256.
6. Ter-Krikorov, A. M. (1977). *Optimalnoye upravlenie i matematicheskaya ekonomika [Optimum control and mathematical economy].* Moscow, Nauka, 216.
7. Shorikov, A. F. (2005). Algoritm resheniya zadachi optimalnogo terminalnogo upravleniya v lineynykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Algorithm of the problem solution of optimum terminal control in linear discrete dynamic systems]. Informatsionnyye tekhnologii v ekonomike: teoriya, modeli i metody. Sb. nauchn. tr. [Information technologies in economy: theory, models and methods. Collection of scientific works]. Yekaterinburg, Ural State University Publ., 119-138.
8. Shorikov, A. F. (1997). *Minimaksnoye otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Minimax estimation and management in discrete dynamic systems].* Yekaterinburg, Ural State University Publ., 242.

Information about the authors

Shorikov Andrey Fyodorovich (Yekaterinburg, Russia) — Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Chair for Applied Mathematics, Yeltsyn Ural Federal University (19, Mira str., Yekaterinburg, 620002, Russia, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Korshunov Lev Aleksandrovich (Barnaul, Russia) — Doctor of Economics, Professor, President, Polzunov Altai State Technical University (46, Lenina str., Barnaul, Altai Territory, 656038, Russia, e-mail: prezident.altstu@mail.altstu.ru).