УДК: 519.863; 658.628.011.1; 65.012.122

А. Ф. Шориков, Е. С. Рассадина

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ ТОВАРНОГО АССОРТИМЕНТА ПРЕДПРИЯТИЯ[1]

В статье рассматривается методика решения многошаговой динамической задачи оптимального комплексного адаптивного управления структурой товарного ассортимента предприятия. Для организации оптимального адаптивного терминального управления рассматриваемой системой предлагается рекуррентный алгоритм, который сводит исходную многошаговую задачу к реализации конечной последовательности задач оптимального программного терминального управления. В свою очередь, решение каждой из задач оптимального программного терминального управления сводится к реализации конечной последовательности только одношаговых операций в форме решения задач линейного и выпуклого математического программирования. Таким образом, предлагаемый подход позволяет разрабатывать управленческие решения с учетом наличия текущего информационного обеспечения, т. е. по принципу обратной связи, направленные на формирование оптимальной структуры товарного ассортимента, способствующего оптимизации прибыли, а также сохранению желаемого уровня прибыли предприятия на длительный период времени.

Ключевые слова: экономико-математическое моделирование, товарный ассортимент предприятия, многокритериальная оптимизация, дискретная динамическая система, оптимальное программное и адаптивное управление

В современных условиях наличия конкуренции рынок определяет необходимый ему ассортимент продукции, поэтому основная задача конкретного предприятия — удовлетворять спрос на свою продукцию лучше и эффективнее, чем конкуренты. При оптимизации структуры товарного ассортимента предпри-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 12-02-00000а).

ятия необходимо учитывать как внутренние возможности предприятия на начальный период планирования производства, так и требования внешней среды — рынков сбыта выпускаемой продукции, а также капитальные вложения при возможном расширении производства. Причем все это следует рассматривать в форме долгосрочной перспективы, разбивая горизонт планирования на отдельные интервалы времени (шаги) для более детальной проработки.

Существующие подходы к решению подобных задач базируются в основном на статических моделях и используют аппарат стохастического моделирования, для применения которого требуется знание вероятностных характеристик основных параметров модели и специальных условий на реализацию рассматриваемого процесса. Отметим, что для использования аппарата стохастического моделирования необходимы очень жесткие условия, которые на практике обычно заранее выполнить невозможно.

В данной статье предлагается использовать детерминированный подход для моделирования и решения исходной задачи оптимизации структуры товарного ассортимента предприятия в форме динамической задачи оптимального адаптивного терминального управления. Для решения этой задачи предлагается общая схема, основанная на решениях соответствующих задач оптимального программного терминального управления [4, 5] для рассматриваемой динамической системы, которая сводится к реализации решений конечного числа задач линейного и выпуклого математического программирования [1]. Предлагаемый метод дает возможность разрабатывать эффективные численные процедуры, позволяющие реализовать компьютерное моделирование динамики рассматриваемой задачи, сформировать оптимальную стратегию адаптивного управления [4] исследуемым процессом и получить оптимальный результат.

Представленные в статье результаты базируются на исследованиях [3-5] и могут быть использованы для экономико-математического моделирования и решения других задач оптимизации процессов прогнозирования данных и оптимизации управления, а также для разработки соответствующих программно-технических комплексов для поддержки принятия эффективных управленческих решений на практике. Экономико-математические модели таких задач представлены, например, в работах [1, 2, 5].

1. Формирование экономико-математической модели динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия

Пусть на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T}=\{0, 1, \dots, T\}$ ($T > 0$) рассматривается процесс управления структурой товарного ассортимента предприятия и для его моделирования предлагается использовать динамическую систему из работы [5], описываемую линейными дискретными рекуррентными уравнениями.

Для формирования экономико-математической модели процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия введем следующие обозначения:

n — общее количество видов готовой продукции предприятия;

m — общее количество типов ресурсов, из которых можно произвести данную продукцию;

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор объемов остатков готовой продукции, хранящейся на складах предприятия в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор объемов остатков производственных ресурсов, хранящихся на складах предприятия в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$A(t) = \left\| a_{ij}(t) \right\|_{i\in\overline{1,m};\ j\in\overline{1,n}}$ — матрица норм затрат ресурсов в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$); $a_{ij}(t)$ — количество ресурса i-го типа, необходимого для изготовления единичного объема продукции j-го вида ($i \in \overline{1, m}$; $j \in \overline{1, n}$);

$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор интенсивностей производства готовой продукции в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор интенсивностей пополнения складских ресурсов в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор объемов спроса на готовую продукцию, выпускаемую в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$s = (s_1, s_2, \dots, s_n)' \in \mathbf{R}^n$ — вектор начального объема спроса на готовую продукцию при реализации процесса управления в начальный момент времени (при $t = 0$);

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)' \in \mathbf{R}^m$ — вектор начального объема производственных ресурсов при реализации процесса управления в начальный момент времени (при $t = 0$);

если в начале периода времени t ($t \in \overline{0, T-1}$); на складе имелись запасы готовой продукции в количестве $x(t)$, то к концу этого периода для продажи будет годна только часть, равная $H_n(t)\, x(t)$, где $H_n(t) = \left\| h_{jj}(t) \right\|_{j\in\overline{1,n}}$ — есть диагональная матрица порядка n, характеризующая «старение» продукции за этот период; для запасов производственных ресурсов, к концу периода t ($t \in \overline{0, T-1}$) для использования в производстве будет годна только их часть, равная $R_m(t)y(t)$, где $R_m(t) = \|r_{ii}(t)\|_{i\in\overline{1,m}}$ — диагональная матрица порядка m, характеризующая «старение» производственных ресурсов за этот период;

финансовые средства на инвестиции в расширение производства в начальный момент периода управления (при $t = 0$) предприятие предполагает формировать на основе банковского кредита в объеме G и собственных финансовых ресурсов G_0, отчисляемых от чистой прибыли и направляемых на расширение производства;

$k(t)$ — количество доступных финансовых средств, имеющихся к началу периода t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$\gamma(t)$ — числовой коэффициент $(0 \le \gamma(t) \le 1)$, характеризующий «непредвиденные издержки» финансовых ресурсов за период t ($t \in \overline{0, T-1}$);

α — коэффициент, учитывающий долю налоговых отчислений от прибыли;

$\beta(t) = r/100 + \beta_\partial(t)$, здесь r — годовая процентная ставка за пользование кредитом, $b_\partial(t)$ — доля возвращаемого кредита в период t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$c(t) = (c_1(t), c_2(t), ..., c_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор реальных закупочных цен на реализованную продукцию, произведенную предприятием в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$q(t) = (q_1(t), q_2(t), ..., q_m(t)) \in \mathbf{R}^m$ — вектор реальных цен на производственные ресурсы, необходимые предприятию для производства продукции в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — вектор затрат предприятия на хранение на складе остатков готовой продукции в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

$w(t) = (w_1(t), w_2(t), ..., w_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — вектор затрат предприятия на хранение на складе остатков производственных ресурсов в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$);

вектор $l(t) = (\langle a_1^{(1)}(t), u(t)\rangle_n, \langle a_2^{(1)}(t), u(t)\rangle_n, \ldots, \langle a_m^{(1)}(t), u(t)\rangle_n)' \in \mathbf{R}^m$; здесь и далее, для $k \in N$ символом $\langle a,\ b\rangle_k$ будем обозначать скалярное произведение векторов a и b в пространстве $\mathbf{R}^k (k \in N)$; вектор $a_i^{(1)}(t) = (a_{i1}(t), a_{i2}(t), \ldots, a_{in}(t))' \in \mathbf{R}^n$ $(i \in \overline{1, m})$;

$Z(t)$ — общие суммарные издержки предприятия за t периодов времени ($t \in \overline{0, T-1}$).

Тогда в соответствии с результатами работы [5] можно сформировать следующую систему линейных дискретных рекуррентных уравнений, описывающую в полном объеме динамику рассматриваемого процесса:

$$\begin{cases} x(t+1) = H(t)x(t) + u(t) - s(t),\ x(0) = 0_n,\ s(0) = s, \\ y(t+1) = R(t)y(t) + v(t) - A(t)u(t),\ y(0) = b, \\ k(t+1) = \gamma(t)k(t) + \alpha\cdot\langle c(t), s(t)\rangle_n - \alpha\cdot\langle q(t), l(t)\rangle_n - \\ -\alpha\cdot\langle z(t), x(t)\rangle_n - \alpha\cdot\langle w(t), y(t)\rangle_m - \beta(t)\cdot G, \\ k(0) = G + G_0, \\ Z(t+1) = Z(t) + \langle q(t), l(t)\rangle_m + \langle z(t), x(t)\rangle_n + \\ + \langle w(t), y(t)\rangle_m + \beta(t)G, \\ Z(0) = \langle z(0), x(0)\rangle_n + \langle w(0), y(0)\rangle_m,\ t \in \overline{0, T-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Отметим, что эта система позволяет моделировать динамику многошагового процесса управления структурой производства товарного ассортимента предприятия в зависимости от заданных начальных условий и выбора конкретных реализаций управляющих воздействий.

Введенные выше векторы $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ интенсивностей производства готовой продукции и $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — интенсивностей пополнения производственных ресурсов в период времени t ($t \in \overline{0, T-1}$) есть управляющие воздействия в системе и такие, что каждая пара ($u(t)$, $v(t)$) должна удовлетворять следующему заданному ограничению:

$$\begin{gathered} (u(t), v(t)) \in \boldsymbol{UV}(t) = \\ = \{(u(t), v(t)):\ u(t) \in \mathbf{R}^n, v(t) \in \mathbf{R}^m, \\ S_{\min}(t) \le u(t) \le S_{\max}(t)\}, \\ \langle q(t), v(t)\rangle_m \le k(t), \\ A(t)u(t) \le y(t) + v(t)\}, \end{gathered} \quad (2)$$

где $S_{\min}(t) = (S_{\min 1}(t), S_{\min 2}(t), \ldots, S_{\min n}(t)) \in \mathbf{R}^n$ — вектор минимально приемлемого объема производства готовой продукции (например, точка безубыточности для каждого вида продукции); $S_{\max}(t) = (S_{\max 1}(t), S_{\max 2}(t), \ldots, S_{\max n}(t)) \in \mathbf{R}^n$ — вектор верхнего предела выпуска продукции (например, максимальная емкость рынка по каждому наименованию продукции, максимальная мощность производства и др.).

При этом для всех $t \in \overline{0, T}$ должны также выполняться следующие заданные фазовые ограничения:

$$\begin{cases} x_j(t) \geq 0, \ (j \in \overline{1,n}), \\ y_i(t) \geq 0, \ (i \in \overline{1,m}), \\ k(t) \geq 0, \ Z(t) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, что в процессе управления структурой товарного ассортимента предприятия учет ограничений (2), (3) является необходимым условием, которому должны удовлетворять покоординатные сечения траекторий, порожденных реализациями оптимальных управляющих воздействий в дискретной динамической системе (1).

Заметим также, что параметры: $A(t)$, $H(t)$, $R(t)$, $s(t)$, s, $c(t)$, $q(t)$, $z(t)$, $w(t)$, α, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, b, G, G_0, $S_{\min}(t)$, $S_{\max}(t)$ в системе (1)–(3), для всех $(t \in \overline{0, T-1})$ должны быть известны заранее (например, формироваться исходя из имеющихся статистических данных о рассматриваемом процессе, технических и экономических прогнозов и др. источников путем применения методов оценивания данных и идентификации параметров рассматриваемой системы).

Нетрудно показать, что сформированная выше экономико-математическая модель (1)–(3) динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия относится к классу линейных дискретных управляемых динамических систем [1, 2, 4].

Действительно, пусть на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0, T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ $(T > 0)$ рассматривается многошаговая динамическая система, которая состоит из одного управляемого объекта — объекта I (управляемого игроком P), движение которого описывается линейным дискретным рекуррентным векторным уравнением

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)\bar{u}(t), \ \bar{x}(0) = \bar{x}_0. \quad (4)$$

Здесь $t \in \overline{0, T-1}$; $\bar{x} \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ — фазовый вектор объекта I, который для модели динамики процесса управления товарным ассортиментом предприятия (1) состоит из $\bar{n} = n + m + 2$ координат, т. е. $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)), k(t), Z(t) \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$; $u(t) \in \mathbf{R}^{\bar{p}}$ — управляющее воздействие (управление) игрока P, стесненное заданным ограничением

$$\bar{u}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t) = \boldsymbol{UV}(t) \subset \mathbf{R}^{\bar{p}} \quad (\bar{p} \in \mathbf{N} : \bar{p} \leq \bar{n}) \ (5)$$

и такое, что в модели (1) состоит из $\bar{p} = n + m$ координат таких, что первые n координат есть координаты вектора $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t))' \in \mathbf{R}^n$ — интенсивностей производства готовой продукции, следующие m координат — координаты вектора $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t))' \in \mathbf{R}^m$ — интенсивностей пополнения производственных ресурсов в период времени t $(t \in \overline{0, T-1})$, т. е. $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t), v_1(t), v_2(t), \ldots, v_m(t)) \in \mathbf{R}^{\bar{p}}$.

Предполагается также, что для всех $(t \in \overline{0, T-1})$, каждая допустимая реализация фазового вектора $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t), k(t), Z(t)) \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ на основании (3), удовлетворяет следующему фазовому ограничению

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t), k(t), Z(t)) \in \boldsymbol{X}_1(t) =$$
$$= \begin{cases} x_j(t) \geq 0, \ x_j(0) = 0, \ j \in \overline{1,n}; \\ y_i(t) \geq 0, \ y_i(0) = b_i, \ i \in \overline{1,m}; \\ k(t) \geq 0, \ k(0) = G + G_0 \geq 0; \\ Z(t) \geq 0, \ Z(0) \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Матрицы $\bar{A}(t)$ и $\bar{B}(t)$ в векторном уравнении (4) для экономико-математической модели динамики процесса управления структурой товарного ассортимента предприятия (1) подробно расписаны в работе [5]. Матрицы $\bar{A}(t)$ и $\bar{B}(t)$ есть действительные матрицы порядков $(\bar{n} \times \bar{n})$ и $(\bar{n} \times \bar{p})$ соответственно, и такие, что для всех $t \in \overline{0, T-1}$ матрица $\bar{A}(t)$ является невырожденной, т. е. для нее существует соответствующая ей обратная матрица $\bar{A}^{-1}(t)$, а ранг матрицы $\bar{B}(t)$ равен $\bar{p}$ (размерности вектора $\bar{u}(t)$).

Отметим, что для всех $(t \in \overline{0, T-1})$ множество $\boldsymbol{U}_1(t)$ в ограничении (5), в соответствии с (2), не пусто и является выпуклым замкнутым и ограниченным многогранником (с конечным числом вершин) в пространстве $\mathbf{R}^{\bar{p}}$.

Опишем информационные возможности игрока P в процессе оптимального адаптивного (по принципу обратной связи) управления в дискретной динамической системе (4)–(6).

Предполагается, что для любого $\vartheta \in \overline{1, T}$ и соответствующего целочисленного промежутка времени $\overline{0, \vartheta} \in \overline{0, T}$ к моменту времени ϑ в процессе управления игроком P измеряются и запоминаются следующие величины: $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ — начальное фазовое состояние объекта I; $\bar{u}(\cdot) = \{\bar{u}(t)\}_{t \in \overline{0, \vartheta-1}}$ — история реализации управления игрока P на промежутке $\overline{0, \vartheta}$. Уравнение (4) и ограничения (5), (6) для него также известны.

Рассматриваемый процесс управления оценивается значением выпуклого функционала $\tilde{\boldsymbol{F}} : \mathbf{R}^{\bar{n}} \to \mathbf{R}^1$ определенного на возможных реализациях фазового вектора $\bar{x}(T) \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ системы (4)–(6) в финальный момент времени T.

Тогда для системы (4)–(6) цель оптимального адаптивного управления с точки зрения игрока P может быть сформулирована следующим образом: на заданном промежутке времени $\overline{0, T}$ требуется, чтобы игрок P организовал свое управление $\bar{u}(\cdot) = \{\bar{u}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}}$ (для всех $t \in \overline{0, T-1}$: $\bar{u}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$) по принципу обратной связи (как реализацию оптимальной адаптивной стратегии из выбранного класса допустимых адаптивных стратегий), используя возможную (в силу (4)–(6)) реализацию фазового вектора $\bar{x}(\cdot) = \{\bar{x}(t)\}_{t \in \overline{0, T}}$ совместно со всей другой доступной информацией об этом процессе, таким образом, чтобы было максимальным значение функционала $\tilde{\boldsymbol{F}}$, определенного на реализации вектора $\bar{x}(T) \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ (где $\bar{x}(T)$ есть реализация фазового вектора объекта I в момент времени T, соответствующая управлению $\bar{u}(\cdot)$).

2. Формализация задачи оптимизации адаптивного управления процессом

Введем ряд определений, которые необходимы для строгой математической формулировки задач оптимального программного и адаптивного управления для соответствующих процессов в рассматриваемой дискретной динамической системе (4)–(6).

Для $k \in \mathbf{N}$ и любого целочисленного промежутка $\overline{i, j}$ $(i \le j)$ символом $\boldsymbol{S}_k(\overline{i, j})$ будем обозначать метрическое пространство функций целочисленного аргумента $\phi : \overline{i, j} \to \mathbf{R}^k$, в котором метрика ρ_k задается соотношением

$$\rho_k(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot)) = \max_{t \in \overline{i, j}} \left\| \phi_1(t) - \phi_2(t) \right\|_k$$

$$(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in \boldsymbol{S}_k(\overline{i, j}) \times \boldsymbol{S}_k(\overline{i, j})),$$

а символом $\mathrm{comp}(\boldsymbol{S}_k(\overline{i, j}))$ — множество всех непустых и компактных в смысле этой метрики подмножеств пространства $\boldsymbol{S}_k(\overline{i, j})$.

Здесь и далее для любых множеств X и Y множество $X \times Y$ есть произведение X и Y, т. е. множество всех пар (x, y) таких, что $x \in X$, $y \in Y$ (аналогичное обозначение используется и для большего числа множеств).

Используя ограничение (5), определим множество $\boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta}) \in \mathrm{comp}(\boldsymbol{S}_{\bar{p}}(\overline{\tau, \vartheta - 1}))$ допустимых программных управлений $\bar{u}(\cdot) = \{\bar{u}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}}$ игрока P на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < \vartheta)$ соотношением

$$\boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta}) = \{\bar{u}(\cdot) : \bar{u}(\cdot) \in \boldsymbol{S}_{\bar{p}}(\overline{\tau, \vartheta - 1}),$$

$$\forall\ t \in \overline{\tau, \vartheta - 1},\ \bar{u}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)\}.$$

Назовем набор $w(\tau) = \{\tau, \bar{x}(\tau)\} \in \overline{0, T} \times \mathbf{R}^{\bar{n}}$ $(w(0) = w_0 = \{0, \bar{x}_0\})$ — τ-позицией игрока P в дискретной динамической системе (4)–(6).

Для всех $\tau \in \overline{0, T}$ определим также множество $\hat{\boldsymbol{W}}(\tau) = \{\tau\} \times \mathbf{R}^{\bar{n}}$ $\hat{\boldsymbol{W}}(0) = \hat{\boldsymbol{W}}_0 = \{w(0) = w_0 :$ $w_0 = \{0, \bar{x}_0\} \in \{0\} \times \mathbf{R}^{\bar{n}}\})$ всех допустимых τ-позиций игрока P.

Далее для фиксированного промежутка времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ $(\tau < \vartheta)$ τ-позиции $w(\tau) = \{\tau, \bar{x}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ игрока P и его управления $\bar{u}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta})$ определим следующее множество

$$\boldsymbol{W}(\tau, w(\tau), \vartheta, \bar{u}(\cdot)) = \{w(\vartheta) : w(\vartheta) = \{\vartheta, \bar{x}(\vartheta)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(\vartheta),$$

$$\bar{x}(\vartheta) = \bar{x}_{\overline{\tau, \vartheta}}(\vartheta; \bar{x}(\tau), \bar{u}(\cdot))\}, \qquad (7)$$

которое будем называть множеством допустимых ϑ-позиций игрока P, отвечающим его τ-позиции $w(\tau)$и управлению $\bar{u}(\cdot)$.

Здесь вектор $\bar{x}(\vartheta) = \bar{x}_{\overline{\tau, \vartheta}}(\vartheta; \bar{x}(\tau), \bar{u}(\cdot)) \in \mathbf{R}^{\bar{n}}$ определяет сечение движения объекта I на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta}$ в момент времени ϑ, порожденного в силу (4) парой $(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\cdot))$.

При использовании определения (7) и условий, оговоренных для системы (4)–(6), в соответствии с результатами работ [3, 4], справедливо следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 2.1. Для фиксированного промежутка времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ $(0 < \tau < \vartheta)$ и для возможной в силу (4)–(6) реализации набора $(w_0, \bar{u}(\cdot)) \in \hat{\boldsymbol{W}}_0 \times \boldsymbol{U}(\overline{0, \vartheta})$, соответствующего промежутку времени $\overline{0, \vartheta}$ справедливо следующее соотношение:

$$\boldsymbol{W}(0, w_0, \vartheta, \bar{u}(\cdot)) = \boldsymbol{W}(\tau, w_*(\tau), \vartheta, \tilde{u}(\cdot)). \qquad (8)$$

Здесь для τ-позиции $w_*(\tau) = \{\tau, \bar{x}_*(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ игрока P и его управления $\tilde{u}(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta})$ должны выполняться следующие соотношения:

$$\bar{x}_*(\tau) = \bar{x}_{\overline{0, \tau}}(\tau; \bar{x}_0, \bar{u}_*(\cdot)) \in \mathbf{R}^{\bar{n}},$$

$$\bar{u}_*(\cdot) = \{\bar{u}(t)\}_{t \in \overline{0, \tau - 1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0, \tau});$$

$$\tilde{u}(\cdot) = \{\bar{u}(t)\}_{t \in \overline{\tau, \vartheta - 1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{\tau, \vartheta}).$$

Тогда для оценивания качества процесса управления игроком P в динамической системе (4)–(6) на промежутке времени $\overline{\tau, \vartheta} \subseteq \overline{0, T}$ введем векторный терминальный функционал (показатель качества процесса) $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{\tau, T}} = (\Phi^{(1)}_{\overline{\tau, T}}, \Phi^{(2)}_{\overline{\tau, T}}, \ldots, \Phi^{(r)}_{\overline{\tau, T}})$, представляющий из себя набор из r выпуклых функционалов $\Phi^{(i)}_{\overline{\tau, T}}$: $\hat{\boldsymbol{W}}(\tau) \times \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T}) \to \mathbf{R}^1$ $(i \in \overline{1, r})$, таких, что для реализации набора $(w(\tau), \bar{u}(\cdot)) \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau) \times \boldsymbol{U}(\overline{\tau, T})$ где $w(\tau) = \{\tau, \bar{x}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$, их значения определяются следующими соотношениями:

$$\Phi^{(i)}_{\overline{\tau, T}}(w(\tau), \bar{u}(\cdot)) = F^{(i)}_{\overline{\tau, T}}(\bar{x}_{\overline{\tau, T}}(T; \bar{x}(\tau), \bar{u}(\cdot))) =$$

$$= F^{(i)}_{\overline{\tau, T}}(\bar{x}(T)),\ i \in \overline{1, r}, \qquad (9)$$

где $F^{(i)}_{\overline{\tau,T}}:\mathbf{R}^{\bar{n}}\to\mathbf{R}^{1}$ — есть выпуклый функционал для каждого $i\in\overline{1,r}$; $\bar{x}(T)=\bar{x}_{\overline{\tau,T}}(T;\bar{x}(\tau),\bar{u}(\cdot))$.

На основании введенного соотношением (9) векторного функционала $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{\tau,T}}=(\Phi^{(1)}_{\overline{\tau,T}},\Phi^{(2)}_{\overline{\tau,T}},\ldots,\Phi^{(r)}_{\overline{\tau,T}})$ для оценки качества рассматриваемого процесса оптимизации структуры товарного ассортимента предприятия введем в рассмотрение скалярную целевую функцию $\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,T}}(w(\tau),\bar{u}(\cdot))$, значения которой для всех допустимых на промежутке времени $\overline{\tau,T}$ реализаций наборов $(w(\tau),\ \bar{u}(\cdot))\in\hat{\boldsymbol{W}}(\tau)\times\boldsymbol{U}(\overline{\tau,\ T})$, где $w(\tau)=\{\tau,\ \bar{x}\ (\tau)\}\in\hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ и $\bar{u}(\cdot)=\{\bar{u}(t)\}_{t\in\overline{\tau,T-1}}\in\boldsymbol{U}(\overline{0,\ T})$ определяются в соответствии со следующим соотношением:

$$\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,T}}(w(\tau),\ \bar{u}(\cdot))=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot\Phi^{(i)}_{\overline{\tau,T}}(w(\tau),\ \bar{u}(\cdot))=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot F^{(i)}_{\overline{\tau,T}}(\bar{x}_{\overline{\tau,T}}(T;\bar{x}(\tau),\bar{u}(\cdot))=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\cdot F^{(i)}_{\overline{\tau,T}}(\bar{x}(T))=\tilde{\boldsymbol{F}}(\bar{x}(T)),$$
$$\forall i\in\overline{1,r}:\mu_i\geq 0,\sum_{i=1}^{r}\mu_i=1, \tag{10}$$

где $\bar{x}(T)=\bar{x}_{\overline{\tau,T}}(T;\bar{x}(\tau),\bar{u}(\cdot))$, а $\tilde{\boldsymbol{F}}$ есть выпуклый функционал, введенный ранее.

Отметим, что целевая функция (функционал) $\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,T}}(w(\tau),\ \bar{u}(\cdot))$ является выпуклой скалярной сверткой векторного функционала $\boldsymbol{\Phi}_{\overline{\tau,T}}=(\Phi^{(1)}_{\overline{\tau,T}},\Phi^{(2)}_{\overline{\tau,T}},\ldots,\Phi^{(r)}_{\overline{\tau,T}})$, т. е. она формируется в соответствии с методом скаляризации векторных целевых функций (см., например, [1]) с неотрицательными весовыми коэффициентами μ_i, $i\in\overline{1,\ r}$, которые могут определяться, например, экспертным путем или на основании знания статистической информации об истории реализации основных параметров рассматриваемого процесса.

Тогда на основании изложенного выше можно сформулировать с позиции игрока P его цель во вспомогательной задаче оптимального программного управления для динамической системы (4)–(6) следующим образом.

Будем считать, что игрок P на промежутке времени $\overline{\tau,\vartheta}\subseteq\overline{0,T}$ $(\tau<T)$ заинтересован в таком исходе процесса управления — путем влияния на него возможным выбором своих допустимых программных управлений $\bar{u}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{\tau,\ T})$ при котором функционал $\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,\ T}}$, определенный соотношением (10), принимает наибольшее возможное значение.

Достижение этой цели игроком P реализуется в рамках решения следующей нелинейной многошаговой задачи оптимального программного терминального управления для динамической системы (4)–(6).

Задача 2.1. Для фиксированных промежутка времени $\overline{\tau,\vartheta}\subseteq\overline{0,T}$ $(\tau<T)$ и реализации τ-позиции $w(\tau)=\{\tau,\bar{x}(\tau)\}\in\hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ $(w(0)=w_0)$ игрока P в динамической системе (4)–(6) требуется найти множество $\boldsymbol{U}^{(e)}_{F}(\overline{\tau,T},w(\tau))\subseteq\boldsymbol{U}(\overline{\tau,T})$ оптимальных программных управлений $\bar{u}^{(e)}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{\tau,T})$ игрока P, которое определяется соотношением

$$\boldsymbol{U}^{(e)}_{F}(\overline{\tau,T},w(\tau))=\{\bar{u}^{(e)}(\cdot):\bar{u}^{(e)}(\cdot)\in\boldsymbol{U}(\overline{\tau,T}),$$
$$\boldsymbol{F}^{(e)}_{\overline{\tau,T}}=\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,T}}(w(\tau),\bar{u}^{(e)}(\cdot))=\max_{\bar{u}(\cdot)\in U(\overline{\tau,T})}\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,T}}(w(\tau),\bar{u}(\cdot))=$$
$$=\max_{\bar{u}(\cdot)\in U(\overline{\tau,T})}\tilde{\boldsymbol{F}}(\bar{x}_{\overline{\tau,T}}(T;\bar{x}(\tau),\bar{u}(\cdot)))=c^{(e)}_{F}(\overline{\tau,T},w(\tau))\}, \tag{11}$$

как реализацию конечной последовательности только одношаговых операций.

Здесь функционал $\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,\ T}}$ определен соотношением (10).

Число $c^{(e)}_{\boldsymbol{F}}(\overline{\tau,T},w(\tau))=\boldsymbol{F}^{(e)}_{\overline{\tau,T}}$ будем называть оптимальным значением результата процесса программного терминального управления игрока P на промежутке времени $\overline{\tau,\ T}$ для дискретной динамической системы (4)–(6) относительно его τ-позиции $w(\tau)$ и функционала $\boldsymbol{F}_{\overline{\tau,\ T}}$.

Отметим, что решение данной задачи, определяемое соотношением (11), существует, и в работе [5] приведена конструктивная общая схема его нахождения.

Пусть на заданном промежутке времени $\overline{0,\ T}$ $(T>0)$ игрок P, распоряжаясь выбором управления $u(t)\in\boldsymbol{U}_1(t)$, $t\in\overline{0,\ T-1}$ в динамической системе (4)–(6), находится в условиях информированности, оговоренных в разделе 1 данной работы. Тогда на основании изложенного выше можно сформулировать с позиции игрока P его цель в задаче оптимального адаптивного терминального управления для динамической системы (4)–(6) следующим образом.

Будем считать, что игроку P на промежутке времени $\overline{0,\ T}$ требуется так организовать выбор своего управления $u(\cdot)=\{u(t)\}_{t\in\overline{0,\ T-1}}$ (для всех $t\in\overline{0,\ T-1}:u(t)\in\boldsymbol{U}_1(t)$) объектом I в адаптивном режиме (по принципу обратной связи) на основании знания в каждый момент времени $t\in\overline{0,\ T-1}$ своей t-позиции $w(t)=\{\tau,\ \bar{x}(t)\}\in\hat{\boldsymbol{W}}(t)$ чтобы при завершении реализации процесса управления функционал $\boldsymbol{F}_{\overline{0,\ T}}$, определенный соотношением (10), принимал наибольшее возможное значение.

Тогда, используя предыдущие рассуждения и аналогично [3, 4], можно формализовать достижение этой цели игрока P следующим образом.

Допустимой стратегией адаптивного управления $\boldsymbol{U}_a$ игрока P для дискретной динамической системы (4)–(6) на промежутке времени $\overline{0,\ T}$ будем называть отображение

$\boldsymbol{U}_a : \hat{\boldsymbol{W}}(\tau) \to \boldsymbol{U}(\tau)$ которое каждому моменту времени $\tau \in \overline{0, T-1}$ и возможной реализации τ-позиции $w(\tau) = \{\tau, \bar{x}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ ($w(0) = w_0$) назначает множество $\boldsymbol{U}_a(w(\tau)) \subseteq \boldsymbol{U}_1(t)$ управлений $\bar{u}(t) \in \boldsymbol{U}_1(t)$ игрока P. Обозначим множество всех допустимых стратегий адаптивного управления игрока P для рассматриваемого процесса через $\boldsymbol{U}_a^*$.

Далее пучком движений объекта I на промежутке времени $\overline{0,T}$ соответствующим уравнению движения (4), начальной позиции $w_0 = \{0, \bar{x}_0\} \in \hat{\boldsymbol{W}}_0$ игрока P и его допустимой стратегии $\boldsymbol{U}_a = \boldsymbol{U}_a(w^*(t)) \in \boldsymbol{U}_a^*$, $t \in \overline{0, T-1}$ $w^*(t) = \{t, \bar{x}^*(t)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(t)$, будем называть множество

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}(\cdot;\overline{0,T},w_0,\boldsymbol{U}_a) = \{\bar{x}^*(\cdot) : \bar{x}^*(\cdot) \in \boldsymbol{S}_n(\overline{0,T}),\\
&\exists\, \bar{u}^*(\cdot) \in \boldsymbol{U}(\overline{0,T}), \forall\, t \in \overline{0,T},\\
&\bar{x}^*(t) = \bar{x}_{\overline{0,T}}(t;\bar{x}_0,\bar{u}^*(\cdot)),\\
&w^*(t) = \{t,\bar{x}^*(t)\} \in \boldsymbol{W}(0,w_0,t,\bar{u}_t^*(\cdot)) \subseteq \hat{\boldsymbol{W}}(t),\\
&w^*(0) = w_0,\ \bar{u}_t^*(\cdot) = \{\bar{u}(\tau)\}_{\tau\in\overline{0,t-1}},\\
&\forall\, t \in \overline{0,T-1},\ \bar{u}^*(t) \in U_a(w^*(t))\}. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Тогда можно сформулировать следующую нелинейную многошаговую задачу оптимального адаптивного терминального управления для динамической системы (4)–(6).

Задача 2.2. Для заданных промежутка времени $\overline{0, T}$ $(T > 0)$ и начальной позиции $w_0 = \{0, \bar{x}_0\} \in \hat{\boldsymbol{W}}_0$ игрока P в дискретной динамической системе (4)–(6) требуется найти его стратегию оптимального адаптивного управления $\boldsymbol{U}_a^{(e)} = \boldsymbol{U}_a^{(e)}(w(t)) \in \boldsymbol{U}_a^*$, $w(t) = \{t, \bar{x}(t)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(t)$ $t \in \overline{0, T-1}$, $(w(0) = w_0)$, которая удовлетворяет соотношению

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}^{(e,a)} = \boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}(w_0,\boldsymbol{U}_a^{(e)}) = \max_{U_a\in U_a^*} \boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}(w_0,\boldsymbol{U}_a) =\\
&= \max_{U_a\in U_a^*}\ \max_{\bar{x}(T)\in X(T;\overline{0,T},w_0,U_a)} \tilde{\boldsymbol{F}}(\bar{x}(T)) =\\
&= \max_{\bar{x}(T)\in X(T;\overline{0,T},w_0,U_a^{(e)})} \tilde{\boldsymbol{F}}(\bar{x}(T)) = c_F^{(e,a)}(\overline{0,T},w_0), \quad (13)
\end{aligned}
$$

как реализацию конечной последовательности только одношаговых операций.

Здесь функционал $\boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}$ определяется согласно соотношению (10).

Число $c_F^{(e,a)}(\overline{0,T},w_0) = \boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}^{(e,a)}$ будем называть оптимальным значением результата процесса адаптивного терминального управления игрока P на промежутке времени $\overline{0, T}$ для дискретной динамической системы (4)–(6) относительно его начальной позиции w_0 и функционала $\boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}$.

Отметим, что из описанных выше условий на параметры системы (4)–(6) решение данной задачи существует, и в следующем разделе данной работы будет приведена конструктивная общая схема для его нахождения.

Далее для любых реализаций управления $\bar{u}_a^{(e)}(\cdot) = \{\bar{u}_a^{(e)}(t)\}_{t\in\overline{0,T-1}}$, $\forall t \in \overline{0,T-1}$: $\bar{u}_a^{(e)}(t) \in \boldsymbol{U}_a^{(e)}(w^{(e)}(t))$ игрока P, порожденного стратегией $\boldsymbol{U}_a^{(e)} \in \boldsymbol{U}_a^*$, и соответствующего ему движения $\bar{x}^{(e)}(\cdot) = \bar{x}_{\overline{0,T}}(\cdot;\bar{x}_0,\bar{u}_a^{(e)}(\cdot)) \in \boldsymbol{X}(\cdot;\overline{0,T},w_0,\boldsymbol{U}_a^{(e)})$ на основании соотношений (10)–(13) нетрудно показать справедливость следующего неравенства:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}(w_0,\bar{u}_a^{(e)}(\cdot)) = \tilde{\boldsymbol{F}}(\bar{x}_{\overline{0,T}}(T;\bar{x}_0,\ \bar{u}_a^{(e)}(\cdot))) =\\
&= \tilde{\boldsymbol{F}}(\bar{x}_a^{(e)}(T)) \le c_{\boldsymbol{F}}^{(e)}(\overline{0,T},w_0) = \boldsymbol{F}_{\overline{\tau,T}}^{(e)} \le\\
&\le \boldsymbol{F}_{\overline{0,T}}^{(e,a)} = c_{\boldsymbol{F}}^{(e,a)}(\overline{0,T},w_0), \qquad (14)
\end{aligned}
$$

где $w^{(e)} = w_0 = \{0, \bar{x}_0\} \in \hat{\boldsymbol{W}}_0$, $\forall t \in \overline{0, T-1}$: $w^{(e)}(t) = \{t,\bar{x}^{(e)}(t)\} \in \boldsymbol{W}(0,w_0,t,\bar{u}_{a,t}^{(e)}(\cdot)) \subseteq \hat{\boldsymbol{W}}(t)$, $\bar{x}^{(e)}(t) = \bar{x}_{\overline{0,t}}(t;\bar{x}_0,\bar{u}_{a,t}^{(e)}(\cdot))$, $\bar{u}_{a,t}^{(e)}(\cdot) = \{\bar{u}_a^{(e)}(\tau)\}_{\tau\in\overline{0,t-1}}$.

Отметим, что из соотношений (14) следует, что результат решения задачи 2.2 может только улучшить результат решения задачи 2.1, т. е. адаптивное управление рассматриваемым процессом оптимизации структуры товарного ассортимента предприятия более перспективно по сравнению с программным управлением.

Таким образом, в данном разделе приведена формализация двух основных и взаимосвязанных между собой задач — 2.1 и 2.2 — соответственно оптимального программного и адаптивного терминального управления для динамической системы (4)–(6), являющейся обобщением исходной экономико-математической модели (1)–(3).

Отметим, что задача 2.2 является основной в данной работе, но ее формализация и решение базируются на задаче 2.1.

3. Общая схема решения задачи 2.2

Приведем общую схему решения задачи 2.2 на основании результатов работ [3-5].

Используя в соответствии с [5] решение задачи 2.1 и учитывая (11), для всех моментов времени $\tau \in \overline{0, T-1}$ и всех τ-позиций $w^{(e)}(\tau) = \{\tau, \bar{x}^{(e)}(\tau)\} \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ $(w^{(e)}(0) = w_0 = \{0, \bar{x}_0\} \in \hat{\boldsymbol{W}}_0)$ игрока P, где $\bar{x}^{(e)}(\tau) = \bar{x}_{\overline{0,T}}(\tau;\bar{x}_0,\bar{u}^{(e)}(\cdot))$, $\bar{u}^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}_F^{(e)}(\overline{\tau,T},w^{(e)}(\tau))$, можно сконструировать следующие множества:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(w^{(e)}(\tau)) = \{\tilde{u}^{(e)}(\tau) : \tilde{u}^{(e)}(\tau) \in \boldsymbol{U}_1(\tau), \tilde{u}^{(e)}(\tau) = \bar{u}^{(e)}(\tau),\\
&\bar{u}^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}_F^{(e)}(\overline{\tau,T},w^{(e)}(\tau)),\ \tau\in\overline{0,T-1}\}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Тогда определим стратегию управления $\tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)} = \tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)}(w(\tau)) \in \boldsymbol{U}_a^*$, $\tau \in \overline{0, T-1}$, $w(\tau) \in \hat{\boldsymbol{W}}(\tau)$ $(w(0) = w_0)$ игрока P для рассматриваемого процесса адаптивного терминального управления в дискретной динамической системе (4)–(6) на промежутке времени $\overline{0, T}$ из класса допустимых стратегий управления $\boldsymbol{U}_a^*$, которая формально описывается следующими соотношениями:

1) для всех $\tau \in \overline{0, T-1}$ и τ-позиций $w^{(e)}(\tau) = \{t, \bar{x}^{(e)}(\tau)\} \in \boldsymbol{W}(0, w_0, \tau, \bar{u}_\tau^{(e)}(\cdot))$ $(w^{(e)}(0) = w_0)$ пусть

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)}(w^{(e)}(\tau)) = \tilde{\boldsymbol{U}}^{(e)}(w^{(e)}(\tau)) \subseteq \boldsymbol{U}_1(\tau); \qquad (16)$$

2) для всех $\tau \in \overline{0, T-1}$ и τ-позиций $w^*(\tau) = \{\tau, x^*(\tau)\} \in \{\hat{\boldsymbol{W}}(\tau) \setminus \boldsymbol{W}(0, w_0, \tau, u_\tau^{(e)}(\cdot))\}$ $(w^*(0) \neq w_0)$ пусть

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)}(w^*(\tau)) = \boldsymbol{U}_1(\tau), \qquad (17)$$

где $\bar{u}_\tau^{(e)}(\cdot) = \{\bar{u}^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, \tau-1}}$, $\bar{u}^{(e)}(\cdot) \in \boldsymbol{U}_F^{(e)}(\overline{0, T}, w_0)$.

Пусть $\tilde{u}^{(e)}(\cdot) = \{\tilde{u}^{(e)}(t)\}_{t \in \overline{0, T-1}} \in \boldsymbol{U}(\overline{0, T})$ есть реализация управления игрока P на промежутке времени $\overline{0, T}$, которая сформирована в результате использования стратегии $\tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)} \in \boldsymbol{U}_a^*$ на этом промежутке времени и такова, что $\tilde{u}^{(e)}(T-1)$ удовлетворяет соотношению (11) при $\tau = T - 1$. Тогда можно вычислить следующее число

$$\tilde{c}_F^{(e,a)}(\overline{0, T}, w_0) = \boldsymbol{F}_{\overline{0, T}}(w_0, \tilde{u}^{(e)}(\cdot)). \qquad (18)$$

Из утверждения 2.1 и соотношений (15)–(18) в соответствии с результатами работ [3-5] справедливо следующее утверждение, которое является основным результатом данной работы.

Утверждение 3.1. Для начальной позиции $(w(0) = w_0 = \{0, \bar{x}_0\} \in \hat{\boldsymbol{W}}_0)$ игрока P в дискретной динамической системе (4)–(6) его стратегия управления $\tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)} \in \boldsymbol{U}_a^*$ на промежутке времени $\overline{0, T}$, которая определяется соотношениями (16) и (17), является стратегией оптимального адаптивного управления для задачи 2.2, т. е. $\tilde{\boldsymbol{U}}_a^{(e)} = \boldsymbol{U}_a^{(e)} \in \boldsymbol{U}_a^*$ и число $\tilde{c}_F^{(e,a)}(\overline{0, T}, w_0)$ есть оптимальный результат для этой задачи, т. е. $\tilde{c}_F^{(e,a)}(\overline{0, T}, w_0) = c_F^{(e,a)}(\overline{0, T}, w_0)$, который соответствует реализации этой стратегии на промежутке времени $\overline{0, T}$ для рассматриваемого процесса управления, и оба эти элемента конструируются путем реализации конечной последовательности только одношаговых операций.

Заключение

Для организации оптимального адаптивного терминального управления, т. е. решения задачи 2.2 в выбранном классе допустимых стратегий адаптивного управления, предлагается рекуррентный алгоритм, который сводит исходную многошаговую задачу к реализации конечной последовательности задач 2.1 — оптимального программного терминального управления. В свою очередь, решение каждой из задач 2.1 сводится к реализации конечной последовательности только одношаговых операций в форме решения задач линейного и выпуклого математического программирования (см. [5]). Тогда можно утверждать, что решение рассматриваемой задачи 2.2 свелось к реализации решения конечной последовательности задач линейного и выпуклого математического программирования.

Отметим, что размерность рассматриваемой дискретной динамической системы вида (4)–(6), являющейся обобщением сформированной дискретной динамической экономико-математической модели процесса оптимального терминального управления структурой товарного ассортимента предприятия (1)–(3), и число шагов процесса оптимального адаптивного управления для предлагаемой общей схемы решения задачи 2.2, ограничиваются только ресурсами памяти и быстродействия компьютера.

Предлагаемая общая схема решения задачи 2.2 позволяет разрабатывать эффективные численные процедуры для реализации компьютерного моделирования решения сформулированной задачи 2.2, являющейся обобщением исходной задачи оптимального адаптивного терминального управления структурой товарного ассортимента продукции предприятия, описываемой экономико-математической моделью (1)–(3).

Список источников

1. *Лотов А. В.* Введение в экономико-математическое моделирование. — М.: Наука, 1984.

2. *Первозванский А. А.* Математические модели в управлении производством. — М.: Наука, 1975.

3. *Шориков А. Ф.* Алгоритм решения задачи оптимального терминального управления в линейных дискретных динамических системах // Информационные технологии в экономике: теория, модели и методы : сб. научн. тр. — Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2005. — С. 119-138.

4. *Шориков А. Ф.* Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997.

5. *Шориков А. Ф., Рассадина Е. С.* Динамическая оптимизация комплексного программного управления структурой товарного ассортимента предприятия // Экономика региона. — 2012. — № 3(31). — С. 261-271.

Информация об авторах

Шориков Андрей Федорович (Екатеринбург, Россия) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории управления и инноваций, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина (620014, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д.13 б, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Рассадина Елена Сергеевна (Магнитогорск, Россия) — старший преподаватель кафедры математических методов в экономике, Магнитогорский государственный университет (455038, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114, e-mail: lena_mgn@mail.ru).

A. F. Shorikov, Ye. S. Rassadina

Dynamic optimization of the complex adaptive controlling by the structure of enterprise's product range

This paper reviews a methodical approach to solve multi-step dynamic problem of optimal integrated adaptive management of a product portfolio structure of the enterprise. For the organization of optimal adaptive terminal control of the system the recurrent algorithm, which reduces an initial multistage problem to the realization of the final sequence of problems of optimal program terminal control is offered. In turn, the decision of each problem of optimal program terminal control is reduced to the realization of the final sequence only single-step operations in the form of the problems solving of linear and convex mathematical programming. Thus, the offered approach allows to develop management solutions at current information support, which consider feedback, and which create the optimal structure of an enterprise's product lines, contributing to optimising of profits, as well as maintenance of the desired level of profit for a long period of time.

Keywords: economic and mathematical modeling, enterprise's product range, multicriteria optimization, discrete dynamical system, optimal program control, optimaladaptive control.

References

1. *Lotov A. V.* (1984). Vvedenie v ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie [An introduction to the economic-mathematical modeling]. Moscow, Nauka.

2. *Pervozvanskii A. A.* (1975). Matematicheskie modeli v upravlenii proizvodstvom [Mathematical models in industrial management]. Moscow, Nauka.

3. *Shorikov A. F.* (2005). Algoritm resheniya zadachi optimalnogo terminalnogo upravleniya v lineynykh diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Algorithm for solving the problem of optimal terminal control in linear discrete dynamical systems]. Informatsionnyye tekhnologii v ekonomike. Teoriya, modeli i metody : sb. nauchn. tr. [Information technology in economics. Theory, models and methods: collection of scientific works]. Yekaterinburg, Ural State University of Economics Publ., 119-138.

4. *Shorikov A. F.* (1997). Minimaksnoe otsenivanie i upravlenie v diskretnykh dinamicheskikh sistemakh [Minimax estimation and control in discrete dynamical systems]. Yekaterinburg, Ural State University Publ.

5. *Shorikov A. F., Rassadina Ye. S.* (2012). Dinamicheskaya optimizatsiya komplexnogo programmnogo upravleniya strukturoy tovarnogo assortimenta predpriyatiya [Dynamic optimization of complex program controlling the structure of an enterprise's product range]. Economy of region, 3 (31), 261-271.

Information about the authors

Shorikov Andrey Fyodorovich (Yekaterinburg, Russia) — Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Chair for Management Theory and Innovations, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin (620014, Yekaterinburg, Lenina av., 13b, e-mail: afshorikov@mail.ru).

Rassadina Yelena Sergeevna (Magnitogorsk, Russia) — Assistant Professor at the Chair for Mathematical Methods in Economics, Magnitogorsk State University (455038, Magnitogorsk, pr. Lenina 114, e-mail: lena_mgn@mail.ru).

Research was conducted with the financial support of Russian Foundation for Humanities (the project No. 12-02-00000a).