ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТОРГОВЛИ МЕЖДУ ХОЗЯЙСТВУЮЩИМИ СУБЪЕКТАМИ

А.С. Урусова

Работа представлена кафедрой информатики и вычислительной математики Карачаево-Черкесского государственного университета им.У. Дж. Алиева.

В данной работе изучается обратная задача сбалансированной торговли в мировой экономике: по заданным $x_i \geq 0$, $i, j = 1, ..., n$, определить $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, ... n$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, ... n$. Предложен метод ее решения, который позволяет свести решение к задаче квадратичного программирования. Решая задачу с помощью средств Microsoft Excel, находим неотрицательные элементы матрицы A.

В задаче используется статистические данные Южного Федерального округа.

Постановка задачи. Математическая модель сбалансированной мировой торговли между n странами имеет вид [1]:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где x_i – национальный доход i-ой страны, $i = 1, ..., n$, a_{ij} – доля (часть) национального дохода, которую j-я страна тратит на закупку товаров в i-ой стране.

Очевидно, $x_i > 0$, $a_j \geq 0$, $i, j = 1, ..., n$.

Кроме того, $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad j = 1, ... n. \qquad (2)$$

Условие (2) показывает ту часть национального дохода j-ой страны, которая тратится (уходит) на внешнюю торговлю с другими странами.

Согласно Н. Ш. Кремер [1], модель (1) позволяет по заданным a_{ij} определять x_i, $i = 1, ... n$.

Кроме того заметим, что модель (1) применима не только к группе торгующих стран, но и к группе торгующих субъектов внутри одной страны. А это означает, что обратную задачу, поставленную применительно к торгующим странам, можно ставить и решать указанным ниже способом и к торгующим между собой субъектам одной страны.

В Статисическом сборнике «Карачаево-Черкесская Республика» [2] представлены сравнительные данные валового продукта по регионам Южного федерального округ (ЮФО) (таблица 1).

Исследуем следующую задачу: используя статистические данные таблицы 1, организовать сбалансированную торговлю между регионами Южного федерального округа.

Введем обозначения: x_i – национальный доход i-го региона, $i = 1, ... 12$, a_{ij} – доля (часть) регионального дохода, которую j-ый регион тратит на закупку товаров в i-ом регионе.

Очевидно, $x_i \geq 0$, $a_{ij} \geq 0$, $i = 1, ... n$, и кроме того выполняется условие (2).

Поставленная задача сводится к задаче квадратичного программирования [3]: по заданному вектору x найти матрицу A с неотрицательными элементами, удовлетворо-

Таблица 1

Данные валового продукта по регионам Южного федерального округа (млн руб.)

	Регион Южного федерального округа	2003 г.
	Южный федеральный округ	**900312,7**
1	Карачаево-Черкесская Республика	11885,5
2	Республика Адыгея	10164,8
3	Республика Дагестан	54851,7
4	Республика Ингушетия	4821,7
5	Кабардино-Балкарская Республика	27003,8
6	Республика Калмыкии	9530,6
7	Алания	20938,5
8	Краснодарский край	275820,3
9	Ставропольский край	110142,7
10	Астраханская область	54279,2
11	Волгоградская область	137448,1
12	Ростовская область	183425,8

ряющими условию (1), которая доставляет минимум

$$|(E-A)x|^2,$$

т.е. к задаче квадратичного программирования

$$|(E-A)x|^2 \to \min, \quad A \ge 0, \qquad (3)$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1,\ j = 1,\ \ldots\ n$$

где

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор валового регионального продукта;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица размерности $n \times n$;

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат.

В более подробной записи (3) имеет вид:

$$(-a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_1)^2 +$$
$$+(a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_2)^2 + \cdots +$$
$$+(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots - a_{nn}x_n + x_n))^2 \to \min_{a_{ij}},$$
$$a_{ij} \ge 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1,\ j = 1,\ldots,n \qquad (4)$$

Согласно данным, приведенным в таблице 1, n = 12,

$$x = (11885{,}5,\ 101164{,}8,\ 54851{,}7,\ 4821{,}7,\ 27003{,}8,\ 9530{,}6,\ 20938{,}5,\ 275820{,}3,\ 110142{,}7,\ 54279{,}2,\ 137448{,}1,\ 183425{,}8)^T,$$

где T– операция транспонирования.

Задача (4) принимает вид:

$$(-10164{,}8a_{11} + 54851{,}7a_{12} + \cdots +$$
$$+9530{,}6a_{1,12} + 10164{,}8)^2 +$$
$$+(10164{,}8a_{21} - 54851{,}7a_{22} + \cdots +$$
$$+9530{,}6a_{2,12} + 10164{,}8)^2 + \cdots + \qquad (5)$$
$$+(10164{,}8a_{12,1} + 54851{,}7a_{12,2} + \cdots -$$
$$-9530{,}6a_{12,12} + 10164{,}8)^2 \to \min_{a_{ij}},$$
$$a_{ij} \ge 0, \sum_{i=1}^{12} a_{ij} \le 1,\ j = 1,\cdots,12.$$

Решая задачу (5) с помощью средств Microsoft Excel, находим неотрицательные элементы матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}29 & 0{,}37 & 0 & 0{,}29 & 0 & 0{,}18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}46 & 0 & 1 & 0{,}14 & 0 & 0 & 0{,}54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}81 & 0{,}14 & 0 & 0{,}66 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}29 & 0{,}02 & 0 & 0 & 0{,}16 & 0{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}88 & 0 & 0 & 0{,}51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}77 & 0{,}29 & 0 & 0{,}68 & 0 & 0 & 0{,}48 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}89 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица *A* показывает, какую долю национального дохода, один регион должен тратить на покупку товаров у другого региона, чтобы торговля между ними была сбалансированной.

Так, например, обращаясь к первому столбцу матрицы *A* (в первом столбце, согласно данным таблицы 1 и обозначению a_{ij}, расположены данные по торговле Карачаево-Черкесской Республики с другими регионами), заключаем, что доля дохода, которую Карачаево-Черкесия должна тратить на закупку товара в других республиках должна составить (при сбалансированной торговле)

$$a_{11} = 0{,}29, \quad a_{12} = 0{,}37, a_{13} = 0,$$

$$a_{14} = 0{,}29, a_{15} = 0, a_{16} = 0{,}18,$$

$$a_{17} = a_{18} = a_{19} = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0.$$

Список литературы

1. *Н.Ш.Кремер и др.* Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов. 3-е издание. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. 479 с.

2. Карачаево-Черкесская Республика: статистический сборник. Черкесск : Карачаево-Черкесскстат. 2005. 253 с.

3. *Сизиков В.С.* Математические методы обработки результатов измерений: учебник для вузов. Спб. : Политехника, 2001. 240 с.