

Для цитирования: Горбунов В. К., Львов А. Г. Эффективные производственные фонды и производственные функции малого предпринимательства регионов // Экономика региона. — 2018. — Т. 14, вып. 2. — С. 502-515
doi 10.17059/2018-2-13
УДК 332.01; 330.14; 330.322.2

В. К. Горбунов, А. Г. Львов

Ульяновский государственный университет (Ульяновск, Российская Федерация; vkgorbunov@mail.ru)

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФОНДЫ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ МАЛОГО ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА РЕГИОНОВ¹

Статья посвящена развитию и новому применению предложенной ранее математической модели формирования «эффективных фондов», под которыми понимается часть основных производственных фондов макроэкономического объекта (отрасли, сектора, региона, страны), используемых в актуальных условиях рыночной экономики. Исходными данными для модели являются валовой выпуск, производственные инвестиции и трудовые затраты. Модель использует макроэкономическую производственную функцию и уравнение динамики эффективных фондов, отражающее процесс освоения инвестиций и амортизации фондов. На основе этой модели ставится задача одновременной оценки параметров производственной функции и реконструкции эффективных фондов. Данная задача повышает адекватность метода производственной функции, предполагающего рациональность используемых факторов производства, и решает новую проблему — количественную оценку эффективных фондов. Усложнение содержательной проблемы ведет к усложнению вычислительного процесса. Последнее преодолевается на основе привлечения дополнительной информации, отражающей специфику конкретного объекта. В данной работе это делается для нового объекта, охватываемого новым методом экономического анализа, — малого предпринимательства. Особенностью этого сектора региональной и национальной экономик является нечеткость понятия производственных фондов и, соответственно, отсутствие их регулярного и надежного статистического учета. Данный сектор представлен в документах Росстата, доступных для исследователей и аналитиков, годовыми показателями оборота, инвестиций в основной капитал и средней численности работников. Для оценки производственных фондов малого предпринимательства предлагается использовать показатель эффективных фондов. Уточненный метод одновременной оценки эффективных фондов и построения производственной функции применен для сектора «юридические лица малого предпринимательства» экономик Приволжского и Уральского федеральных округов на промежутке 2005–2014 гг.

Ключевые слова: региональная экономика, малое предпринимательство, эффективные фонды, производственные функции, инвестиции, освоение инвестиций, оценивание параметров, экспертная информация, регуляризация, изогометрическая аппроксимация, сравнительный анализ

Введение

Малое предпринимательство (МП) является объектом усиленного внимания правительства РФ ввиду его недостаточного развития по сравнению с малым предпринимательством передовых экономик (США, Китай и др.), где доля валовой продукции МП в ВВП составляет 50–80 %. В экономике России эта доля в последние годы оценивается около 12–13 %, и правительство этим очень озабочено². Особенностью

этого сектора национальной и региональной экономик, в частности, является то, что здесь производственные фонды не имеют объективного агрегированного показателя количества (стоимости). Здесь часто используются помещения, машины и оборудование личного пользования, поэтому показатель «производственные фонды» не является показателем регулярной отчетности этого сектора. При этом возникает проблема оценки стоимости производственных фондов МП как сектора экономики. Эта проблема важна для оценки производственного потенциала этого перспективного сектора и использования для его анализа

¹ © Горбунов В. К., Львов А. Г. Текст. 2018.

² Межстрановые экономические сопоставления весьма условны из-за различий в определениях отраслей и расчетах макроэкономических характеристик. (См. сайты Росстата: <http://www.gks.ru/dbscripts/cbsd/DBInet.cgi?pl=1163082> (дата обращения 1.08.2017) и МСП Банка

<https://www.mspsbank.ru/userfiles/2015EU.pdf> (дата обращения 1.08.2017).

метода производственных функций (ПФ), восходящего к классической работе 1928 г. Чарлза Кобба и Пола Дугласа [1], до настоящего времени наиболее цитируемой в экономической литературе. Отметим две работы Р. Солоу и соавторов [2, 3], также имеющие большое значение для развития метода ПФ. С 1960-х годов этот метод стал развиваться в СССР [4, 5].

Основными факторами производства в методе ПФ являются труд и производственный капитал (далее также — капитал) под которым понимается агрегированная стоимость основных производственных фондов. Однако этот показатель плохо определяется из-за трудностей приведения различных компонент фондов сложного объекта к общим ценам, оценки степени их износа, а также из-за типичной неполноты загрузки производственных фондов в рыночной экономике.

Трудности оценки производственного капитала давно вызвали скепсис относительно этого понятия и метода ПФ у ряда известных западных экономистов, исповедующих методологический индивидуализм [6–8]. Эти авторы считают необходимым начинать построение экономических теорий с элементарных «агентов» — индивидов-потребителей и элементарных фирм. Агенты постулируются (без необходимости в науке верификации) независимыми и рациональными, максимизирующими полезность или прибыль, и процедуры агрегирования (функций спроса покупателей и ПФ «фирм») необходимо проводить, согласно этой методологии, только на основе соответствующих микроэкономических объектов. Основные моменты проблемы агрегирования ПФ представлены в обзорной статье [9].

Известно, что редукционистский метод завел неоклассическую теорию в тупик, и существует альтернативный — системный, или холистический, подход к построению теорий спроса и производства. Несмотря на затянувшуюся теоретическую дискуссию об экономической легитимности понятия «производственный капитал», метод ПФ состоялся как инструмент практического экономического анализа (см., в частности, современные работы [10–19]), однако не всегда применяется корректно. Отметим работу [17], авторы которой разрабатывают статистический вариант агрегирования, удовлетворяющий искусственным требованиям неоклассического редукционизма. Можно согласиться с технической целесообразностью этого метода агрегирования в случае, когда система (экономика страны) имеет естественное разбиение (регионы, отрасли) и для

ее подсистем построены соответствующие ПФ одного параметрического класса. Двухэтапное моделирование сложного объекта (при наличии соответствующей информации) может повысить его адекватность.

Производственные функции реальных объектов конструируются как математические модели, подлежащие идентификации по статистическим данным о значениях факторов, используемых по предположению, рационально, и выпуска. Основным фактором — капитал — статистика представляет как балансовые фонды, которые часто весьма условно представляют реальный производственный потенциал, особенно России и других бывших соцстран. На это несоответствие обратили внимание ряд авторов, начиная с конца 1990-х гг., из которых отметим работы [12–15]. В работе В.А. Бессонова [12] предложено строить инвестиционные ПФ вместо стандартных капитальных ПФ, где один из главных факторов — капитал и идентификация проводится по статистике балансовых фондов (наряду с другими данными). При этом новый фактор «инвестиции» просто замещает капитал. Мотивация такой замены: инвестиции, в отличие от балансовых фондов, отражают рыночную конъюнктуру. Это убедительно, но инвестиции непосредственно не отражают процесс формирования основных фондов и их амортизации. При отсутствии инвестиций производство может продолжаться за счет накопленных фондов.

Отсутствие регулярных оценок стоимости производственного капитала в малом предпринимательстве стимулировало некоторых исследователей строить инвестиционные ПФ для этого сектор. В работе Сюань Ян [22] построены линейные инвестиционные ПФ для МП России (для Китая учитывались факторы «налоги» и «стоимость имущества»).

Отметим также, что в печати появились ошибочные работы по применению метода пространственной регрессии, оправданного в биологических исследованиях, для построения универсальной инвестиционной ПФ МП (любого!) региона России по годовичному или панельному набору данных регионов страны, несмотря на существенное различие условий и видов деятельности в них (см. ссылки и анализ этого метода в [23]).

В статье И.Б. Воскобойникова [15, с. 6] введено понятие «эффективные основные фонды» под которыми понимается «часть балансовых основных производственных фондов, реально участвующих в создании продукции, востребованной рынком». Он ввел это понятие,

изучая проблему переоценки основных фондов России в период «трансформационного спада» 1990–2002 гг. Опуская подробное описание методики Воскобойникова оценки стоимости эффективных фондов, отметим ее специфичность как метода исследования экономики России в период перехода от плана к рынку. Автор построил ПФ Кобба — Дугласа [1] $Y = A \cdot K^\beta L^{1-\beta}$ по данным централизованной плановой экономики РСФСР 1960–1989 гг. и применил ее для прогноза значений капитала K на периоде 1991–1994 гг. уже в качестве стоимости эффективных фондов (ЭФ) в описанном ранее значении. Однако 1991 г. стал началом разрушения экономики СССР, в основном самодостаточной и рационально спланированной системы с единым рынком. После 1991 г. экономика РФ была уже принципиально другой, децентрализованной и переориентированной на мировой рынок основных потребителей природных ресурсов как его сырьевой придаток, с новыми — мировыми — ценами, складывающимися на биржах этого рынка. Использование производственной функции одной страны для анализа экономики другой страны вряд ли можно считать обоснованным.

Отметим работу А.А. Афанасьева и О.С. Пономаревой [16], в которой авторы применили стандартную эконометрическую технику для построения ПФ Кобба — Дугласа для ВВП России на промежутке 1990–2012 гг., используя оценки степени загрузки производственных мощностей.

Такие оценки вряд ли могут быть надежными для экономики страны, они редко отражаются статистикой.

В нашей статье [18] предложен метод оценки стоимости эффективных фондов (ЭФ), формируемых в процессе освоения производственных инвестиций, с одновременным построением капитальной ПФ по данным о годовых производственных инвестициях, затратах труда и валовом выпуске объекта на промежутке его наблюдения. Идентификация математической модели такой проблемы существенно сложнее стандартной задачи построения ПФ на основе данных о балансовых фондах, что является естественной платой за повышение адекватности получаемой ПФ. Капитальный фактор такой функции — стоимость ЭФ — соответствует принципу рациональности использования производственных факторов. В качестве метода решения задачи идентификации был предложен специальный вариант метода продолжения по параметру, известный для решения систем нелинейных уравнений [20, 21].

Метод одновременной оценки ЭФ и построения ПФ объекта получил некоторое алгоритмическое и модельное развитие в статье В.К. Горбунова и В.П. Крылова [19] и был применен для анализа экономик Приволжского и Уральского федеральных округов.

В работе Домса [10] был представлен близкий метод построения ПФ по данным об инвестициях, основанный на панельном методе наименьших квадратов для группы сталелитейных заводов, использующих одинаковую технологию. Однако в этой работе нет описания алгоритма решения этой задачи. Монография Хакмана [11], охватывающая широкий круг экономико-математического анализа реальных производственных проблем методом ПФ, работ по оценке ЭФ не отражает.

Оценка ЭФ и построение стандартных «капитальных» ПФ могут быть выполнены для основной части субъектов МП — юридических лиц (без индивидуальных предпринимателей, деятельность которых не отражается официальной статистикой). Состояние этой части сектора МП регионов России представляется годовыми показателями оборота, производственных инвестиций и средних трудовых затрат (численностей занятых). Под оборотом в МП понимается стоимость реализованной продукции, и этот показатель в рамках метода ПФ эквивалентен показателям ВВП или ВРП, использованным в [18, 19] в задачах реконструкции ЭФ-ПФ экономик России и ее регионов. Соответственно, эта задача может решаться и для сектора «юридические лица МП» (ЮМП) территориальных образований — городов, регионов, страны.

В данной статье метод [18] одновременной реконструкции ЭФ и ПФ и задача ее идентификации применяются для анализа нового класса объектов ЮМП и развиваются для учета отмеченных особенностей. Метод применен для ЮМП Приволжского и Уральского федеральных округов, экономики которых исследованы в [19] в целом.

1. Производственные функции в экономическом анализе

1.1. Напомним кратко понятие производственной функции и возможности использования производственной функции как инструмента практического экономического анализа. Согласно [1–5], ПФ являются функциональными моделями достаточно крупных производственных объектов. Эти функции представляют гипотетические зависимости валового выпуска от затрат учитываемых факторов, используе-

мых рационально (относительно уровня квалификации персонала объекта). Соответственно, при построении ПФ в качестве фактора «капитал» должны использоваться эффективные, а не балансовые фонды, плохо определяемые и не всегда загруженные. Задачей ПФ является аппроксимация таблично заданной (как статистика показателей) зависимости выпуска от затрат факторов, отвечающая заданным аналитическим свойствам, приведенным ниже. Аналитический потенциал метода ПФ определяется, прежде всего, возможностью исследования альтернативных процессов развития объекта, в частности, замещения факторов [3].

Рассмотрим двухфакторные функции некоторого параметрического класса

$$Y = F(K, L; w). \tag{1}$$

Здесь Y — валовой выпуск моделируемого объекта за определенное время, K — эффективные производственные фонды, L — труд, и вектор $w = (w_1, \dots, w_p)$ представляет параметры данного класса ПФ. Параметры выбираются из некоторого множества W пространства параметров. Валовой выпуск Y и фонды K измеряются стоимостью, и труд L — стоимостью (совокупной зарплатой) или численностью. ПФ с содержательными переменными называются производственными функциями в абсолютной форме [19].

При рассмотрении теоретических вопросов зависимость ПФ от параметров w не выделяется: $Y = F(K, L)$. Функция $F(K, L)$ предполагается монотонно возрастающей и квазивогнутой¹ в некотором подмножестве (экономической области) множества $\{K \geq 0, L \geq 0\}$. Для макроэкономических ПФ (стран, регионов, секторов) естественно также предположение о дифференцируемости, позволяющее представлять предельные характеристики производства.

Далее, как и в [19], будем использовать характеристики производства: фондоотдача Y/K , производительность труда Y/L , а также дифференциальные характеристики, вычисленные по функции $F(K, L)$: предельные фондоотдача $\partial F(K, L) / \partial K$ и производительность труда $\partial F(K, L) / \partial L$, факторные эластичности

$$\begin{aligned} \varepsilon_K &= \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} \cdot \frac{Y}{K} \equiv \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial \ln K}, \\ \varepsilon_L &= \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} \cdot \frac{Y}{L} \equiv \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial \ln L}. \end{aligned} \tag{2}$$

Сумма $\mu_{KL} = \varepsilon_K + \varepsilon_L$ является эластичностью производства по масштабу [8].

Процесс замещения труда капиталом (при $F(K, L) = \text{const}$) характеризуется предельной нормой замещения

$$S_{LK}(K, L) \equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} : \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = -\frac{dK}{dL} \tag{3}$$

и эластичностью замещения

$$\begin{aligned} \sigma_{LK}(K, L) &= \frac{d(K/L)}{K/L} : \frac{dS_{LK}}{S_{LK}} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln S_{LK}}, \\ &F(K, L) = \text{const}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ввиду сложности задачи одновременной оценки ЭФ и параметров ПФ, рассматриваемой в следующем разделе, используются только два класса капитальных ПФ: функции Кобба — Дугласа

$$AK^\alpha L^\beta \tag{5}$$

с параметрами функций $w = (A, \alpha, \beta) > 0$, и функции постоянной эластичности замещения (ПЭЗ), предложенной и апробированной в классической работе [3]:

$$A(vK^{-\rho} + (1-v)L^{-\rho})^{-\mu/\rho} \tag{6}$$

с параметрами $w = (A, v, \rho, \mu)$. Эти параметры должны соответствовать условиям $(A, \mu) > 0$, $-1 \leq \rho \neq 0$, $0 < v < 1$. При указанных ограничениях обеспечивается возрастание и квазивогнутость функций (5) и (6) во всем неотрицательном ортанте аргументов (K, L) .

Функция КД (5) положительно однородная степени $\mu = \alpha + \beta$, и эта степень представляет также эластичность производства относительно масштаба затрат. Степени α и β представляют факторные эластичности производства (2), и эластичность замещения (4) равна $\sigma = 1$. Независимость этих характеристик относительно режимов работы, определяемых переменными затрат факторов (K, L) , является существенным упрощением.

Функция ПЭЗ (6) также положительно однородная степени μ . Эта степень представляет, как и в случае функции Кобба — Дугласа, эластичность производства относительно масштаба. Здесь факторные эластичности (2) уже не постоянные, и эластичность замещения равна $\sigma = 1/(1 + \rho)$. Эластичность замещения положительна при $\rho > -1$. Известна предельная при $\rho \rightarrow 0$ связь параметров функций ПЭЗ и Кобба — Дугласа:

$$\alpha = \mu v, \beta = \mu(1 - v). \tag{7}$$

¹ Квазивогнутость функции $F(K, L)$ означает, что верхние множества уровней $c \{K \geq 0, L \geq 0: F(K, L) \geq c\}$ выпуклые.

1.2. Переменные (Y, K, L) имеют обычно разные числовые порядки, и это осложняет вычислительный процесс построения ПФ. Это осложнение преодолевается переходом к индексной форме ПФ. Индексная форма функций (1) — это аналогичная по спецификации функция (с другими параметрами ω)

$$v = F(\kappa, \lambda; \omega), \quad (8)$$

связывающая простые индексы соответствующих показателей — отношения их произвольных значений (Y, K, L) к фиксированным (базовым) значениям (Y_0, K_0, L_0) :

$$v = \frac{Y}{Y_0}, \quad \kappa = \frac{K}{K_0}, \quad \lambda = \frac{L}{L_0}. \quad (9)$$

Все индексы (9) имеют порядок единица.

После оценки параметров ω индексной ПФ (8) нужно вернуться к абсолютным переменным и соответствующим параметрам w . Связь этих параметров определяется структурным анализом равенства

$$F(K, L; w) = Y_0 F(\kappa, \lambda; \omega), \quad (10)$$

вытекающего из равенства $Y = Y_0 v$. Для функции Кобба — Дугласа (6) индексная форма имеет вид

$$v = a \kappa^\alpha \lambda^\beta, \quad (11)$$

где $\omega = (a, \alpha, \beta)$, и множитель a связан с множителем A в (5) равенством

$$A = \frac{Y_0 a}{K_0^\alpha L_0^\beta}, \quad (12)$$

Для функции ПЭЗ (6) индексная форма

$$v = a (v' \kappa^{-\rho} + (1 - v') \lambda^{-\rho})^{-\mu/\rho}, \quad (13)$$

и новые множители (a, v') связаны с (A, v) в (6) равенствами

$$A = \frac{Y_0 a}{(v' K_0^\rho + (1 - v') L_0^\rho)^{\mu/\rho}}, \quad v = \frac{v' K_0^\rho}{v' K_0^\rho + (1 - v') L_0^\rho}. \quad (14)$$

Получение оценок параметров индексных функций (11) и (13), позволяет восстановить по равенствам (12) и (14) остальные параметры абсолютных функций (5) и (6). Это позволяет вычислять характеристики производства, зависящие от уровней использования факторов (K, L) .

2. Построение ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов

2.1. Базовая модель. Статистика деятельности юридических лиц малого предпринимательства содержит данные о выпуске (оборот

предприятий) Y_t и о производственных инвестициях I_t за период времени t (обычно год), и о затратах труда L_t (средних за период):

$$\{Y_t, I_t, L_t : t = \overline{0, T}\}. \quad (15)$$

Метод [18] реконструкции ЭФ-ПФ, то есть оценки ЭФ и построения капитальной функции (1) по данным (15), основан на использовании уравнения динамики производственного капитала, отражающего процесс освоения инвестиций и амортизацию фондов. Процесс освоения в общем случае учитывается введением временного лага, но для малого предпринимательства инвестиции обычно расходуются на закупку оборудования и строительство простых объектов. Поэтому лагом здесь можно пренебречь. Вариант модели [19] с введением коэффициента реализуемости инвестиций мы считаем неактуальным для МП, и динамику накопления ЭФ K_t (стоимость на конец периода t) здесь можно описать простейшим уравнением макроэкономической динамики с коэффициентами амортизации¹ m_t :

$$K_t = (1 - m_{t-1})K_{t-1} + I_t, \quad t = \overline{1, T}. \quad (16)$$

Для определения величин $\{K_1, \dots, K_T\}$ согласно (16) следует задать начальное значение эффективного капитала K_0 . Таким образом, динамика капитала определяется значениями инвестиций $\{I_1, \dots, I_T\}$, коэффициентами амортизации m_t и неизвестным начальным капиталом K_0 .

Параметры w модели (1), (16) должны оцениваться вместе с K_0 из условия достаточно хорошего согласования расчетных значений выпуска $F(K_t, L_t; w)$ с приближенно заданными фактическими значениями Y_t :

$$Y_t \approx F(K_t, L_t; w), \quad t = \overline{0, T}. \quad (17)$$

Таким образом, соотношения (16) и (17) являются математической моделью реконструкции ЭФ-ПФ. Идентификация такой модели сводится к оценке параметров $z = (w_1, \dots, w_p, K_0)$, удовлетворяющих ограничения

$$w \in W, K_0 > 0, \quad (18)$$

где множество W соответствует классу функций (1).

Основным методом решения задач идентификации математического моделирования является метод наименьших квадратов (МНК).

¹ Амортизация $m_t K_t$, начисленная по видам экономической деятельности и всей экономики, но без субъектов МП, публикуется Росстатом ежегодно (http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/fund).

Для модели (16), (17) оценка параметров \hat{z} определяется как минимум функции

$$\varphi(z) = \sum_{t=0}^T [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \quad (19)$$

при условиях (16) и (18).

2.2. *Регуляризация.* Опыт решения задач минимизации функции (19) при условиях вида (16) и (18) выявил ее плохую обусловленность. Плохая обусловленность экстремальной задачи означает, что экстремум ее функционала, обычно определяемый приближенно, слабо зависит от аргументов при их изменении некоторым согласованным образом. Такие задачи относятся к классу некорректно поставленных задач и требуют некоторой регуляризации (см. [24]). Регуляризация заключается в дополнении условий задачи с целью стабилизации получаемого решения. Такие условия вводятся на основе экспертной информации об искомом решении. Рассмотрим два варианта введения дополнительной информации.

В первом варианте предполагается, что известна некоторая оценка начальных балансовых фондов \hat{K}_0 . Однако учитывая то, что в малом предпринимательстве показатель стоимости производственных фондов не имеет четкого определения и отражается официальной статистикой косвенно, на основе нерегулярных обследований и без строгого контроля, не следует считать, что значение \hat{K}_0 представляет эффективные фонды, то есть

$$K_0 = \hat{K}_0. \quad (20)$$

Вместо условия (20) следует добавлять «штраф» за его нарушение

$$\Omega(K_0, \hat{K}_0) = [K_0 - \hat{K}_0]^2 \quad (21)$$

в минимизируемый функционал (19) с некоторым весом τ :

$$\hat{\Phi}_\tau(z, \hat{K}_0) = \varphi(z) + \tau\Omega(K_0, \hat{K}_0). \quad (22)$$

Выражение (22) называется функционалом Тихонова, и вместо минимизации функционала (19) при условиях (16), (18), (20) решается задача минимизации (22) при условиях (16) и (18). Штрафной коэффициент τ подбирается эвристически, с целью достижения малых значений основного функционала (19) и «штрафа» (21) нарушения условия (20).

Второй вариант регуляризации задачи ЭФ-ПФ заключается в наложении условия на темп изменения фондовооруженности труда, который будем считать на данном пери-

оде постоянным и равным c . Это значит, что $K_{t+1}/L_{t+1} = c(K_t/L_t)$, соответственно,

$$\frac{K_T}{L_T} = c^T \frac{K_0}{L_0}. \quad (23)$$

Коэффициент c является экспертным и не имеет строгого значения. Тогда, по аналогии с первым вариантом регуляризации, штрафной функционал будет

$$\Omega(K_0, c) = \left[\frac{K_T}{L_T} - c^T \frac{K_0}{L_0} \right]^2, \quad (24)$$

и функционал Тихонова —

$$\Phi_\tau(z, c) = \varphi(z) + \tau\Omega(K_0, c). \quad (25)$$

Вторая регуляризованная задача ЭФ-ПФ заключается в минимизации функционала (25) при условиях (16) и (18).

Важной дополнительной информацией для построения макроэкономических ПФ являются типичные значения факторных эластичностей капитала и труда (2), соответствующие национальным экономикам развитых стран последних десятилетий. Эта тема затронута в работе В. Бессонова [13], где приведены [3, с. 547] «стандартные» значения $\varepsilon_K = 0.3$ и $\varepsilon_L = 0.7$, а также даны ссылки на зарубежные работы, представляющие соответствующие статистические примеры. Эти значения можно учитывать как некоторые ориентиры, также учитывая специфику исследуемого сектора экономики.

2.3. *Индексная форма.* Опишем переход к индексной форме задачи реконструкции ЭФ-ПФ для второй регуляризованной задачи ЭФ-ПФ, оказавшейся более эффективной.

Уравнение динамики капитала (16) следует разделить на начальное значение K_0 и ввести приведенные инвестиции ι (йота):

$$\iota_t = \frac{I_t}{K_0}.$$

При этом получим уравнение в индексной форме:

$$\kappa_t = (1 - m_{t-1})\kappa_{t-1} + \iota_t, \quad t = \overline{1, T}. \quad (26)$$

Терминальное условие (23) в индексной форме примет вид $\kappa^T = c^T \lambda^T$, и функционалы (19) и (24), соответственно,

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) &= \sum_{t=0}^T [v_t - F(\kappa_t, \lambda_t; \omega)]^2, \\ \omega(\zeta, c) &= [\kappa_T - c^T \lambda_T]^2, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\zeta = (\omega_1, \dots, \omega_p, K_0)$ — новые переменные минимизации. Минимизируемый функционал (25) —

$$\Psi_{\tau}(\zeta) = \psi(\zeta) + \tau\omega(\zeta, c). \quad (28)$$

Таким образом, индексная задача реконструкции ЭФ-ПФ второго варианта регуляризации заключается в минимизации функционала (28) по переменным $\zeta = (\omega_1, \dots, \omega_p, K_0)$ при условиях (18), скорректированных с учетом перехода к параметрам ω , и динамическим условиям (26). Обе задачи реконструкции ЭФ-ПФ решаются в два этапа. На первом этапе строится функция Кобба — Дугласа, для которой регрессионная система (17) линеаризуется логарифмированием. На втором этапе строится более содержательная функция ПЭЗ. При этом система (17) не линеаризуется, но хорошее начальное приближение параметров ПЭЗ $\omega = (a, v', \rho, \mu)$ определяется по полученным оценкам параметров КД $\omega = (a, \alpha, \beta)$ по формулам (7) и (14), где ρ полагается малым числом.

2.4. Изогеометрическая аппроксимация. Задачи МНК обычно рассматриваются в рамках регрессионного анализа. При этом ошибки данных считаются случайными. Это предполагает знание функций распределений ошибок, причем они считаются независимыми и — обычно — нормально распределенными. Такие предпосылки позволяют вводить и вычислять статистические критерии качества регрессии, определяемой выбранными функциональными связями между переменными величинами модели. В [18, 19] отмечается, что в задачах построения ПФ и других экономико-математических моделей предпосылки регрессионного анализа обычно не выполняются, так как экономическая динамика уникальна и не допускает повторяемых экспериментов, на основе которых в других областях (техника, финансовые рынки) может быть выявлена статистическая закономерность ошибок. Однако эти недостатки компенсируются содержательностью развитых экономических моделей. В нашем случае теория ПФ представляет обоснованный набор аналитических свойств этих функций — возрастание и квазивогнутость — и их содержательных характеристик: факторные эластичности, предельная норма замещения, эластичность замещения. Последние могут быть оценены независимо. Это позволяет рассматривать задачу реконструкции ЭФ-ПФ как задачу сглаживания возрастающей квазивогнутой функции (1), моделирующей изучаемый производственный объект и заданной неявно таблицей данных (15) и уравнением (16).

Такая задача относится к классу изогеометрической аппроксимации функции, представленной таблицей ее приближенных значений. Под изогеометричностью аппроксимации понимается выполнение заданных аналитических, называемых также геометрическими, свойств. В нашем случае это свойства возрастания и квазивогнутости. Они обеспечиваются классом функций. Главным критерием качества аппроксимации является оценка (19) искомого параметра, и стабилизирующие функционалы (21) или (24) считаются вспомогательными функционалами качества.

3. Реконструкция эффективных фондов и производственных функций малого предпринимательства Приволжского и Уральского федеральных округов

3.1. Объектами исследования далее являются секторы ЮМП, то есть совокупности юридических лиц МП (без учета индивидуальных предпринимателей) Приволжского и Уральского федеральных округов (ПФО и УрФО). Такой выбор обусловлен доступной статистической базой, содержащей регулярные данные о выпуске (обороте), инвестициях в производственный капитал и численности работников. Только юридические лица малого предпринимательства регулярно сдают отчетность об этих показателях. Используются данные Росстата о секторах ЮМП ПФО и УрФО за 2005–2014 гг. из статистических сборников Росстата, а также некоторые данные обо всей экономике этих регионов из [19], где по данным 2000–2012 гг. были оценены ЭФ и построены производственные функции экономик этих округов в целом.

Население ПФО составляет примерно 30 млн чел., и население УФО — около 12 млн чел. Структура экономик этих регионов существенно различается. В ПФО хорошо развиты сельское хозяйство и перерабатывающая промышленность. В УФО сельское хозяйство в силу худших климатических условий развито слабо, но этот регион включает основные нефтегазовые провинции России (Тюменская и Ханты-Мансийская) и другие полезные ископаемые, что дает этому региону существенные преимущества в настоящих условиях в виде природной ренты. Соответственно, валовой региональный продукт (ВРП) на указанном периоде был близок по значениям и в 2012 г. составлял 7911 млрд руб. в ПФО и 7091 млрд руб. в УрФО.

В таблице 1 представлены исходные и приведенные к ценам 2005 г. данные по обороту предприятий ЮМП и инвестициям (млрд руб.)

Таблица 1

Исходные и приведенные данные о ЮМП (в ценах 2005 г.)

Год	ПФО							УФО						
	исходные					приведенные		исходные					приведенные	
	Y_t^S	i_t^G	I_t^S	i_t^I	L_t	Y_t	I_t	Y_t^S	i_t^G	I_t^S	i_t^I	L_t	Y_t	I_t
2005	1522,1	104,5	24,1	114,7	1664,6	1522,1	24,1	720,2	110,2	10,5	94,7	638,0	720,2	10,5
2006	1849,4	107,9	38,4	114,7	1843,2	1642,3	27,7	976,7	107,5	12,6	119,8	651,8	774,2	12,6
2007	2336,1	109,1	61,7	126,1	1992,9	1791,8	34,9	1263,5	105,5	21,1	121,0	710,0	816,8	15,3
2008	3067,5	105,2	124,3	107,9	2405,0	1885,0	37,6	1749,6	103,4	27,4	111,6	757,1	844,6	17,1
2009	2760,5	92,5	90,0	83,5	2305,6	1743,6	31,4	1717,3	92,0	21,3	89,6	887,2	777,0	15,3
2010	3070,8	105,5	111,7	108,1	2340,0	1839,5	34,0	1707,2	106,8	42,1	109,1	956,0	829,8	16,7
2011	3649,2	106,8	110,0	110,1	2441,1	1964,6	37,4	1984,4	104,6	22,3	114,2	1010,9	868,0	19,0
2012	4228,8	104,1	134,8	109,5	2502,6	2045,1	41,0	2154,1	101,5	26,3	106,4	1007,1	881,0	20,3
2013	4631,2	102,4	166,7	106,9	2481,5	2094,2	43,8	2324,9	102,2	26,5	101,4	1005,7	900,4	20,5
2014	4835,2	102,0	188,0	98,9	2489,7	2136,1	43,3	2269,5	99,0	31,6	101,3	964,3	891,4	20,8

Источники: Малое и среднее предпринимательство в России. М.: Росстат (сборники за 2006–2009 гг., 2010–2014 гг.); Российский статистический ежегодник. М.: Росстат, 2015; Регионы России. Социально-экономические показатели. М.: Росстат (за 2011, 2015 гг.).

в основной капитал, а также численности их работников. Обозначения исходных данных: Y_t^S — оборот, i_t^G — индекс величины ВРП¹ (% к предыдущему году), применяемый также к обороту, I_t^S — инвестиции, i_t^I — индекс объема инвестиций в основной капитал (% к предыдущему году); L_t — средняя численность работников (тыс. чел.). Данные, приведенные к ценам 2005 г.: Y_t — оборот и I_t — инвестиции.

Данные таблицы 1 показывают, что сектор ЮМП в ПФО существенно больше аналогичного сектора в УрФО относительно показателей оборота, инвестиций и работников. Так, в 2014 г. эти показатели (в ценах 2005 г., млрд руб.) были в ПФО соответственно 2136,1, 43,3 и 2489,7 тыс. чел., и в УрФО 891,4, 964,3 и 964,3 тыс. чел. Однако разделив эти показатели на численности населения округов, округлив их до 30 млн в ПФО и 12 млн в УрФО, получим душевые показатели соответственно: в ПФО оборот 71,2 тыс. руб./чел., инвестиции 1,44 тыс. руб./чел., занятых в ЮМП 8,3 %, и в УрФО (те же показатели и размерности) 74,2, 1,73 и 8 %. Таким образом, структура исследуемых показателей в обоих регионах практически одинаковая.

Дальнейший анализ исходных данных позволяет выявить различия относительно эффективности секторов ЮМП в экономиках этих регионов. Для сравнения выберем 2012 г., представленный в [19]. В этом году ВРП ПФО составил в текущих ценах 7911 (млрд руб.) и в УФО — 7091 (млрд руб.). Близкие в обоих регионах значения ВРП при существенно мень-

шем населении в УрФО объясняются в основном нефтегазовой рентой, получаемой УрФО. Численности всех работников были в ПФО 14883 тыс. и в УрФО 6159 тыс. Обороты секторов ЮМП составляли относительно ВРП в ПФО (4229/7911) 53 % и в УрФО (2154/7091) 30 %. При этом доли работников ЮМП от всех занятых были в ПФО (2502/14883) 17 %, в УрФО (1007/6159) 16 %. Формально меньшая эффективность сектора ЮМП относительно ВРП в УрФО, видимо, объясняется отсутствием доступа этого сектора к нефтегазовой ренте, завышающей показатели выпуска крупных добывающих секторов.

Статистические данные об основных фондах ЮМП в документах Росстата отсутствуют, но эти фонды (по полной учетной стоимости), можно вычислить косвенно по данным по полному кругу организаций, по некоммерческим организациям и коммерческим организациям (без субъектов МП), вычитая два последних значения из первого. Такие данные и расчет фондов ЮМП на 2005 г. представлены в таблице 2.

Полученные значения \hat{K}_0 «балансовых» фондов ЮМП выглядят чрезмерно большими относительно суммарных инвестиций за 2005–2014 гг. (табл. 1) 355,2 млрд руб. в ПФО и 168,1 млрд руб. в УрФО. Особенно учитывая то, что предшествующий период становления рыночной экономики характерен весьма низкими производственными инвестициями и уровнем жизни того слоя, из которого сложился класс организаторов малого предпринимательства.

3.2. Задача реконструкции ЭФ-ПФ, представленная в предыдущем разделе, решалась в двух вариантах регуляризации, описанных

¹ ВРП определяется как валовая добавленная стоимость всех предприятий, исчисляемая путем исключения из суммарной валовой продукции объемов ее промежуточного потребления.

Таблица 2

Основные фонды организаций на конец 2005 г., млрд руб.

Регион	Тип организаций			
	По полному кругу	Некоммерческие	Коммерческие (без субъектов МП)	ЮМП
ПФО	7 462,18	1 645,58	4 043,76	1 772,84
УрФО	7 936,0	839,01	6 263,95	833,01

Источник: Интерактивная витрина базы данных Федеральной службы государственной статистики, <http://cbsd.gks.ru/> (дата обращения 1.08.2017).

Таблица 3

Результаты комплексной оценки параметров. Первый вариант

Регион	Кобба — Дугласа	Оценки				
		$\tau = 0$	$\tau = 0.0001$	$\tau = 0.001$	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.1$
ПФО $m = 0.0055$	K_0	428.31	429.91	443.11	514.34	1772.84
	A	0.733	0.694	0.43	0.014	7.621
	α	0.967	0.975	1.037	1.483	0
	β	0.248	0.249	0.258	0.325	0.713
	$\varphi(z)$	30 818	30 819	30 833	31 468	69 296
УрФО $m = 0.0075$	K_0	91.23	92.12	99.81	833.01	833.01
	A	235.6	231.99	201.17	167.6	167.6
	α	0.264	0.267	0.294	2×10^{-7}	0
	β	0	0	0	0.238	0.238
	$\varphi(z)$	5 053	5 053	5 058	8 732	8 732

выше. Так как показатели основных фондов и коэффициенты их амортизации в секторе МП отсутствуют, то коэффициенты амортизации взяты постоянными из [19]: $m = 0.055$ (5,5 %) для ПФО и $m = 0.075$ (7,5 %) для УрФО, где они использовались для анализа региональных экономик в целом. Все расчеты реализованы с помощью системы компьютерной математики «Mathematica».

Результаты первого варианта, использующего официальную оценку фондов ЮМП \hat{K}_0 таблицы 2 в соотношениях (20)–(22), представлены в таблице 3 для обоих регионов, функции Кобба — Дугласа (5) и нескольких значений параметра регуляризации τ , имеющего смысл веса внешней оценки \hat{K}_0 в минимизируемом функционале (22). Нулевое значение эластичности α означает несущественность фактора «капитал» для производства, что не соответствует реальности. Следовательно, оценки производственных фондов ЮМП данных регионов, вычисленные с учетом официальных оценок (табл. 2), не соответствуют понятию ЭФ и не должны использоваться для регуляризации задачи реконструкции ЭФ-ПФ. Этот вывод дополняет предыдущий вывод о низком качестве официальных данных о фондах, полученный простым анализом.

Второй вариант регуляризации использует экспертную информацию о темпе изменения фондовооруженности труда s , и заключается в минимизации нагруженного функционала

Тихонова (25) при условиях (16) и (18). Здесь при переходе от функции Кобба — Дугласа (5) к ПЭЗ (6) неустойчивость относительно искомым параметров повышается в связи с увеличением степени свободы. Вместо трех параметров функции (5) $w = (A, \alpha, \beta)$ имеем в (6) 4 параметра $w = (A, v, \rho, \mu)$. Вычислительные эксперименты выявили особую сложность стабилизации параметра ρ , определяющего эластичность замещения труда капиталом $\sigma = 1/(1 + \rho)$. На данном этапе была решена серия таких задач в индексной форме, то есть минимизации функционала (28) при фиксированных значениях ρ .

В таблице 4 представлены оценки величины начальных ЭФ \hat{K}_0 , параметров функций Кобба — Дугласа и ПЭЗ в абсолютной форме, МНК-невязки $\varphi(z)$ исходной задачи (19), и индексных невязок $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta, c)$ задачи минимизации (28), а также «экспертные»¹ значения темпов изменения фондовооруженности труда s и параметра регуляризации τ . Параметры ρ, c , и τ выбраны путем подбора и соответствуют лучшим вариантам относительно главного критерия $\varphi(z)$ аппроксимации системы (17) в индексном варианте $\psi(\zeta)$ и вспомогательного критерия $\omega(\zeta, c)$ выполнения экспертного условия (24) в индексной форме $\kappa^T = c^T \lambda_{\tau}$.

¹ Роль экспертов в данном исследовании выполняли авторы.

Таблица 4

Результаты комплексной оценки параметров. Второй вариант

ПФО: $c = 0.98, \tau = 1$				УФО: $c = 0.96, \tau = 1$			
Кобба — Дугласа		ПЭЗ		Кобба — Дугласа		ПЭЗ	
\hat{K}_0	388.7	\hat{K}_0	389.7	\hat{K}_0	131.1	\hat{K}_0	130.6
A	1.596	A	1.516	A	59.171	A	60.7
α	0.721	ν	0.637	α	0.401	ν	0.838
β	0.349	μ	1.073	β	0.094	μ	0.493
$\varphi(z)$	34429	ρ	0.01	$\varphi(z)$	8 371	ρ	-0.01
$\psi(\zeta)$	0.01486	$\psi(\zeta)$	0.01485	$\psi(\zeta)$	0.01614	$\psi(\zeta)$	0.01612
$\omega(\zeta, c)$	5.4×10^{-6}	$\omega(\zeta, c)$	4.2×10^{-6}	$\omega(\zeta, c)$	0.002	$\omega(\zeta, c)$	0.002

Таблица 5

Эффективные фонды, фондоотдача, производительность труда и фондовооруженность

Год	ПФО				УФО			
	K_t	Y_t/K_t	Y_t/L_t	K_t/L_t	K_t	Y_t/K_t	Y_t/L_t	K_t/L_t
2005	389.7	4.00	0.94	0.234	130.6	5.87	1.20	0.205
2006	392.3	4.14	0.88	0.213	131.3	5.86	1.18	0.201
2007	398.5	4.24	0.85	0.200	134.0	5.83	1.10	0.189
2008	411.4	4.49	0.77	0.171	139.3	5.73	1.05	0.184
2009	426.4	4.38	0.81	0.185	145.9	5.66	0.93	0.164
2010	434.4	4.38	0.81	0.186	150.3	5.60	0.88	0.157
2011	444.5	4.42	0.80	0.182	155.7	5.51	0.85	0.154
2012	457.4	4.42	0.81	0.183	163.0	5.35	0.87	0.162
2013	473.3	4.36	0.83	0.191	171.1	5.20	0.88	0.170
2014	491.0	4.33	0.85	0.197	178.8	5.05	0.94	0.185
2014/2005	1.26	1.08	0.91	0.843	1.37	0.86	0.78	0.906

Таблица 6

Характеристики производства

Хар-ки	ПФО: $c = 0.98$				Хар-ки	УрФО: $c = 0.96$			
	Кобба — Дугласа		ПЭЗ			Кобба — Дугласа		ПЭЗ	
	2005	2014	2005	2014		2005	2014	2005	2014
S_{LK}	0.113	0.095	0.115	0.095	S_{LK}	0.048	0.044	0.046	0.042
ε_K	0.721		0.719	0.723	ε_K	0.401		0.401	0.400
ε_L	0.349		0.354	0.350	ε_L	0.094		0.091	0.092
μ	1.07		1.073		μ	0.495		0.492	
σ	1		0.909		σ	1		1.111	

Как видно, переход от производственной функции Кобба — Дугласа к функции ПЭЗ не улучшил существенно результаты аппроксимации статистических значений оборотов Y_t ЮМП обоих регионов, и оценки начальных фондов \hat{K}_0 изменились несущественно. Соответственно, варианты восстановленных ЭФ для обеих функций различаются также несущественно. Они представлены для более содержательной функции ПЭЗ в таблице 5 вместе с соответствующими показателями фондоотдачи и фондовооруженности труда. Здесь нет неправдоподобного отличия оцененных стоимостей (млрд руб.) начальных ЭФ 389,7 для ПФО и 130,6 для УрФО от суммарных инвестиций за 2005–2014 гг., равных 355,2 и 168,1 соот-

ветственно, в отличие от официальных показателей таблицы 2.

Отметим, что примерно четырехкратное превышение абсолютным критерием ПФО $\varphi(z) = 34429$ критерия УрФО $\varphi(z) = 8371$ объясняется примерно двукратным превышением соответствующих оборотов. Эта разница исчезает в значениях индексных критериев $\psi(\zeta)$.

Восстановление стоимости ЭФ позволяет вычислить дифференциальные характеристики производства, приведенные в первом разделе: предельные эффективности факторов, эластичности факторные (2) и производства μ , равную сумме последних, предельная норма замещения (3), эластичность замещения (4). Они представлены в таблице 6.

4. Обсуждение результатов

Регионы ПФО и УрФО, выбранные для демонстрации метода ЭФ-ПФ, исследовались ранее [19] этим методом относительно всей экономики, и исследование секторов ЮМП дополняет их общий анализ. В таблицах 4, 5 и 6, представлены лучшие (из рассмотренных вариантов) результаты моделирования секторов ЮМП с целью анализа процесса формирования ЭФ как освоения и рационального использования инвестиций на периоде 2005–2014 гг. и построения соответствующих производственных функций. Ввиду ухудшения обусловленности задачи ЭФ-ПФ, неизбежного при усложнении стандартной задачи построения ПФ, исходная задача была доопределена с привлечением дополнительной информации об искомом решении. Было исследовано два варианта регуляризации, основанных на условной «экспертной» информации: о «балансовых фондах» объектов, и о темпах изменения фондовооруженности труда в данных секторах производства.

Первый вариант выявил несоответствие официальных оценок балансовых фондов в обоих округах принципу рациональности использования факторов. Второй вариант регуляризации, представляемый таблицами 4, 5 и 6, основан на экспертной оценке темпа изменения фондовооруженности труда. Эти темпы равны $c = 0.98$ для ПФО и $c = 0.96$ для УрФО, то есть в обоих регионах предполагалось снижение фондовооруженности за 9 лет масштабом c^T , то есть $(0.98)^9 = 0.83$ для ПФО и $(0.96)^9 = 0.69$ для УрФО, что соответствует экстенсивному развитию секторов ЮМП. Оцененные значения этих отношений, представленные в таблице 5, получились соответственно для ПФО 0.843, и для УрФО 0.906. Для уточнения степени расхождения предсказания величины c^T и тенденции изменения фондовооруженности можно построить линейные регрессии оцененных фондовооруженностей таблицы 5.

Дифференциальные характеристики таблицы 6 вычислены для функций Кобба — Дугласа и ПЭЗ, представленных в таблице 4. Функция ПЭЗ уточняет факторные эластичности ($\varepsilon_K, \varepsilon_L$) в зависимости от произвольных факторов производства (K, L), а также позволяет получить нетривиальную (отличную от единицы) оценку эластичности замещения $\sigma = 1 / (1 + \rho)$. Факторные эластичности на 2014 год $\varepsilon_K = 0.723$ и $\varepsilon_L = 0.350$ для ПФО и $\varepsilon_K = 0.400$ и $\varepsilon_L = 0.092$ для УрФО показывают превосходство ПФО над УрФО относительно перспектив развития отрасли МП по обоим направлениям: интенсификации за счет накопления производ-

ственных фондов и расширения за счет увеличения работников. При этом эластичность производства ЮМП ПФО $\mu = 1.073$ демонстрирует возрастающую отдачу от масштаба, и для УрФО эластичность $\mu = 0.492$ демонстрирует убывающую отдачу.

Полученные значения факторных эластичностей капитала и труда не соответствуют «стандартным» значениям $\varepsilon_K = 0.3$ и $\varepsilon_L = 0.7$, типичным, как отмечено в разделе 2.2, для национальных экономик развитых стран последних десятилетий. Однако малое предпринимательство России как сектор национальной экономики имеет характеристики, существенно отличающиеся от характеристик МП экономики развитых стран, эволюционирующие многие десятилетия, насыщенные современным дорогостоящим оборудованием и высококвалифицированными кадрами рабочих, инженеров и управленцев. В МП России используются обычно устаревшее оборудование и простые трудозатратные технологии, что и определяет существенное превышение эластичности выпуска относительно капитала, критичного для МП, над эластичностью относительно труда.

В целом можно утверждать, что малое предпринимательство, охватывающее микро- и малые предприятия (без индивидуальных предпринимателей) существенно лучше развито в ПФО и имеет там лучшие перспективы роста.

5. Заключение

Данная работа представляет развитие и практическую демонстрацию универсального метода оценки эффективных производственных фондов с построением производственных функций макроэкономических объектов нового типа — малого предпринимательства региона. Специфичность данных объектов состоит в том, что производственные фонды, используемые для выпуска товарной продукции, в малом предпринимательстве не имеют четкого определения и не являются показателем регулярной отчетности и контроля. Изложенный и апробированный метод оценки ЭФ дает возможность оценивать стоимость производственных фондов важного сектора новой экономики, недоступную для прямого учета в официальной статистике. Других методов объективного и регулярного решения данной проблемы пока не существует.

Модель формирования ЭФ имеет потенциал развития за счет привлечения более гибких ПФ, а также повышения качества экспертной информации, привлекаемой для уточнения важных параметров модели. Использование бо-

лее гибких ПФ позволит, при развитии вычислительных методов для усложняющихся задач идентификации, уточнять содержательные характеристики производства. Для этого предполагается использовать положительно однородные функции с переменной эластичностью замещения капитала трудом, давно привлекающие внимание зарубежных специалистов [25]. Первым обобщением использованной в нашем исследовании функции ПЭЗ является функция Реванкара [26] с линейной зависимостью эластичности замещения от фондовооруженности. В недавней статье [27] представлен общий класс линейно однородных вогнутых ПФ,

а также его обобщение на класс положительно однородных квазивогнутых функций, что существенно расширяет возможности метода ПФ в общем и в контексте рассмотренной здесь проблемы оценки эффективных фондов.

Повышение качества экспертной информации требует привлечения компетентных специалистов-аналитиков статистических служб и региональных администраций, имеющих опыт практического использования экономико-математических методов, как известных из учебников, так и предлагаемых академической и университетской наукой.

Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00372).

Список источников

1. Cobb C. W., Douglas P. H. A theory of production // The American Economic Review. — 1928. — Iss. 18 (1). Supplement. — P. 139–165.
2. Solow R. M. Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics, 1957. — Vol. 39. — No 3. — P. 312–320.
3. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency / Arrow K. J., Chenery H. B., Minhas B. S., Solow R. M. // The Review of Economics and Statistics. — 1961. — Vol. 43. — No 3. — P. 225–250.
4. Терехов Л. Л. Производственные функции. — М.: Статистика, 1974. — 127 с.
5. Клейнер Г. Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 239 с.
6. Robinson J. The Production Function and the Theory of Capital // The Review of Economic Studies. — 1953–1954. — Iss. 21 (2). — P. 81–106.
7. Mishra S. K. A Brief History of Production Functions. MPRA Paper 5254. — University Library of Munich: Germany, 2007. — 23 p. [Электронный ресурс]. URL: <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/5254/> (дата обращения: 31.08.2017).
8. Felipe J., McCombie J. The Aggregate Production Function and the Measurement of Technical Change. 'Not Even Wrong'. — Edward Elgar Publishing Limited. — 2013. — 388 p.
9. Васильев Е. П. Агрегированная производственная функция // Дайджест-Финансы. — 2006. — № 6 (138). — С. 26–31.
10. Doms M. Estimating capital efficiency schedules within production functions // Economic Inquiry, 1996. — Iss. 34(1). — P. 78–92.
11. Hackman S. T. Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives. — Berlin: Springer, 2008. — 520 p.
12. Бессонов В. А. Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике // Бессонов В. А., Цухло С. В. Анализ динамики российской переходной экономики. — М.: ИЭПП, 2002. — С. 5–89.
13. Бессонов В. А. О динамике совокупной факторной производительности в российской переходной экономике // Экономический журнал ВШЭ. — 2004. — № 4. — С. 542–587.
14. Бессонов В. А., Воскобойников И. Б. О динамике основных фондов и инвестиций в российской переходной экономике // Экономический журнал ВШЭ. — 2006. — № 2. — С. 193–228.
15. Воскобойников И. Б. О корректировке динамики основных фондов в российской экономике // Экономический журнал ВШЭ. — 2004. — № 1. — С. 3–20.
16. Афанасьев А. А., Пономарева О. С. Производственная функция народного хозяйства России в 1990–2012 гг. // Экономика и математические методы. — 2014. — Т. 50, № 4. — С. 21–33.
17. Гребнев М. И., Шульц Д. Н. Статистический метод агрегирования производственных функций // Экономика и математические методы. — 2016. — № 2, Т. 52. — С. 112–128.
18. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях // Экономика и математические методы. — 2012. — Вып. 2. — С. 95–107.
19. Горбунов В. К., Крылов В. П. Оценка эффективности основного капитала предприятий методом производственных функций // Экономика региона. — 2015. — № 3. — С. 334–347. — doi 10.17059/2015-3-27.
20. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975. — 558 с.

21. Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. — Springer, 2006. — 664 p.
22. Сюань Ян. Факторы и стратегии развития малого промышленного бизнеса. На примере России и Китая : автореф. дисс. ... канд. экон. наук. — М. : ЦЭМИ РАН. 2007. — 23 с.
23. Горбунов В. К., Деревенский В. Г. Производственные функции малого предпринимательства регионов России. О методе «пространственной регрессии» // Вестник Московского университета. — 2015. — № 1. — С. 94–109. — (21. Управление (государство и общество)).
24. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач: 3-е изд. — М. : Наука, 1986. — 288 с.
25. Sato R., Hoffman R. F. Production functions with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing // The Review of Economics and Statistics, 1968. — Vol. 50, No 4. — P. 453–460.
26. Revankar N. S. A class of variable elasticity of substitution production functions // Econometrica. — 1971. — V. 39. — No 1. — P. 61–71.
27. Gorbunov V. K. Analytical representation of concave and quasiconcave homogeneous functions // Optimization. — 2017. — Vol. 66. — Iss. 4. — P. 507–519. — DOI: 10.1080/02331934.2016.1278000.

Информация об авторах

Горбунов Владимир Константинович — доктор физико-математических наук, профессор, Ульяновский государственный университет; ORCID: orcid.org/0000-0001-5276-0501; Researcher ID: E-4191-2014; Scopus Author ID: 7102170017 (Российская Федерация, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42; e-mail: vkgorbunov@mail.ru).

Львов Александр Геннадьевич — кандидат экономических наук, доцент, Ульяновский государственный университет (Российская Федерация, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42; e-mail: aglvov@mail.ru).

For citation: Gorbunov, V. K. & Lvov, A. G. (2018). Effective Production Funds and Production Functions of Regional Small Business. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 14(2), 502-515

V. K. Gorbunov, A. G. Lvov

Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation; e-mail: vkgorbunov@mail.ru)

Effective Production Funds and Production Functions of Regional Small Business

The paper is devoted to the development and the new application of the mathematical model of effective capital funds (ECF) formation, which has been offered earlier. These funds are understood as a part of the capital funds of a macroeconomic object (a branch, a sector, a region, a country) used in the current conditions of market economy. The initial data for the model are gross output, production investments, and labour expenses. The model uses a macroeconomic production function (PF) and the dynamic equation for ECF, which reflects the investment control and depreciation processes. On the basis of this model, we address the problem of a simultaneous assessment of the PF parameters and reconstruction of ECF. This problem increases the adequacy of the PF method assuming rationality of the used production factors as well as solves a new problem — ECF quantitative assessment. Complication of the substantial problem leads to complication of computing process. We overcome this complication attracting the additional information, which reflects the specificity of a concrete entity. We apply this method to a new object covered by the new method of economic analysis — small business (SB). The peculiarity of this sector of the regional and national economy is that its capital funds have no clear definition, and, respectively, there is a lack of their regular and reliable statistical record. The Federal State Statistics Service documents, available to researchers and analysts, characterize small business by the yearly indicators of a turnover, investments into capital funds, and the average number of workers. For the estimation of SB's capital funds, we offer to use the indicator of ECF. The specified method of ECF estimation and PFs design is applied to the sector of "legal entities of SB" of the Volga and the Ural Federal Regions on the interval of 2005–2014.

Keywords: regional economy, small business, effective production funds, production functions, investments, investment accumulation, parameter estimation, expert information, regularization, isogeometric approximation, comparative analysis

Acknowledgements

The research has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project № 16-06-00372).

References

1. Cobb, C. W. & Douglas, P. H. (1928). A theory of production. *The American Economic Review*, 18(1), Supplement, 139–165.
2. Solow, R. M. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320.
3. Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. & Solow, R. M. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, 43(3), 225–250.
4. Terekhov, L. L. (1974). *Proizvodstvennyye funktsii [Production functions]*. Moscow: Statistika Publ., 127. (In Russ.)
5. Kleiner, G. B. (1968). *Proizvodstvennyye funktsii. Teoriya, metody, primeneniye [Production functions: Theory, methods, applications]*. Moscow: Finansy i statistika Publ., 239. (In Russ.)
6. Robinson, J. (1953–1954). The Production Function and the Theory of Capital. *The Review of Economic Studies*, 21(2), 81–106.

7. Mishra, S. K. (2007). *A Brief History of Production Functions*. MPRA Paper 5254. University Library of Munich: Germany, 23. Retrieved from: <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/5254/> (date of access: 31.08.2017).
8. Felipe, J. & McCombie, J. (2013). *The Aggregate Production Function and the Measurement of Technical Change*. 'Not Even Wrong'. Edward Elgar Publishing Limited, 388.
9. Vasilyev, E. P. (2006). Agregirovannaya proizvodstvennaya funktsiya [Aggregate production function]. *Daydzhest-Finansy [Digest Finance]*, 6(138), 26–31. (In Russ.)
10. Doms, M. (1996). Estimating capital efficiency schedules within production functions. *Economic Inquiry*, 34(1), 78–92.
11. Hackman, S. T. (2008). *Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives*. Berlin: Springer, 520.
12. Bessonov, V. A. (2002). *Problemy postroeniya proizvodstvennykh funktsiy v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike [The problem of production functions' construction in the Russian transition economy]*. Bessonov, V. A. & Tsukhlo, S. V. Analiz dinamiki rossiyskoy perekhodnoy ekonomiki [The analysis of dynamics of the Russian transition economy]. Moscow: IEPP Publ., 5–89. (In Russ.)
13. Bessonov, V. A. (2004). O dinamike sovokupnoy faktornoy proizvoditelnosti v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike [On the dynamics of the total factor productivity in the Russian transition economy]. *Ekonomicheskij zhurnal VShE [The HSE Economic Journal]*, 4, 542–587. (In Russ.)
14. Bessonov, V. A. & Voskoboynikov, I. B. (2006). O dinamike osnovnykh fondov i investitsiy v rossiyskoy perekhodnoy ekonomike [On the dynamics of the fixed capital and investments in the Russian transition economy]. *Ekonomicheskij zhurnal VShE [The HSE Economic Journal]*, 2, 193–228. (In Russ.)
15. Voskoboynikov, I. B. (2004). O korrrektirovke dinamiki osnovnykh fondov v rossiyskoy ekonomike [On the correction of the fixed capital's dynamics in the Russian transition economy]. *Ekonomicheskij zhurnal VShE [The HSE Economic Journal]*, 1, 3–20. (In Russ.)
16. Afanasyev, A. A. & Ponomareva, O. S. (2014). Proizvodstvennaya funktsiya narodnogo khozyaystva Rossii v 1990–2012 gg. [The aggregate production function of the Russian economy in 1990–2012]. *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and the Mathematical Methods]*, 50(4), 21–33. (In Russ.)
17. Grebnev, M. I. & Shults, D. N. (2016). Statisticheskij metod agregirovaniya proizvodstvennykh funktsiy [Statistical method of production functions aggregation]. *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and the Mathematical Methods]*, 2(52), 112–128. (In Russ.)
18. Gorbunov, V. K. & Lvov, A. G. (2012). Postroenie proizvodstvennykh funktsiy po dannym ob investitsiyakh [The Construction of Production Functions Using Investment Data]. *Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and the Mathematical Methods]*, 2, 95–107. (In Russ.)
19. Gorbunov, V. K. & Krylov, V. P. (2015). Otsenka effektivnosti osnovnogo kapitala predpriyatij metodom proizvodstvennykh funktsiy [Region Effective Production Assets and Their Assessment By The Production Function Method]. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 3, 334–347. doi 10.17059/2015–3–27. (In Russ.)
20. Ortega, J. M. & Rheinboldt, W. C. (1975). *Iteratsionnyye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnyimi [Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables]*. Moscow: Mir Publ., 558. (In Russ.)
21. Nocedal, J. & Wright, S. (2006). *Numerical Optimization*. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering): Springer, 664.
22. Syuan Yan (2007). *Faktory i strategii razvitiya malogo promyshlennogo biznesa (na primere Rossii i Kitaya): avtoref. diss. ... kand. ekon. nauk [Factors and strategies of small industrial business (on the examples of Russia and China). Abstract of PhD thesis in Economics]*. Moscow: TsEMI RAN Publ., 23. (In Russ.)
23. Gorbunov, V. K. & Derevensky, V. G. (2015). Proizvodstvennyye funktsii malogo predprinimatelstva regionov Rossii: o metode "prostranstvennoy regressii" [Production functions of small business Russian regions: About the cross-section regression]. *Vestnik Moskovskogo universiteta [Moscow University Bulletin]*, 1, 94–109. (Series 21. Public Administration). (In Russ.)
24. Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. Ya. (1986). *Metody resheniya nekorrektnykh zadach: 3-e izd. [Solution of Ill-Posed Problems. 3rd ed.]*. Moscow: Nauka Publ., 288. (In Russ.)
25. Sato, R. & Hoffman, R. F. (1968). Production functions with variable elasticity of factor substitution: some analysis and testing. *The Review of Economics and Statistics*, 50(4), 453–460.
26. Revankar, N. S. (1971). A class of variable elasticity of substitution production functions. *Econometrica*, 39(1), 61–71.
27. Gorbunov, V. K. (2017). Analytical representation of concave and quasiconcave homogeneous functions. *Optimization*, 66(4), 507–519. DOI: 10.1080/02331934.2016.1278000.

Authors

Vladimir Konstantinovich Gorbunov — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Ulyanovsk State University; ORCID: orcid.org/0000-0001-5276-0501; Researcher ID: E-4191-2014; Scopus Author ID: 7102170017 (42, Tolstogo St., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation; e-mail: vkgorbunov@mail.ru).

Aleksandr Gennadyevich Lvov — PhD in Economics, Associate Professor, Ulyanovsk State University (42, Tolstogo St., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation; e-mail: aglvov@mail.ru).